●中国科学技术大学数学研究生教材丛书●

University of Science and Technology of China Graduate Texts in Mathematics

公理集论

汪芳庭　编著



中国科学技术大学出版社

中国科大数学研究生教材丛书

公 理 集 论

汪芳庭 编著



中国科学技术大学出版社
1995·合肥



(皖)新登字 08

中

中国科学技术大学出版社出版发行
(安徽省合肥市金寨路 96 号　邮编:230026)
中国科学技术大学印刷厂印刷
新华书店经销
*
开本:850×1168/32　印张:6.5　字数:166 千字
1995 年 1 月第 1 版　1995 年 1 月第 1 次印刷
印数:1—1500 册
ISBN7-312-00597-7/O·150　定价:7.00 元

内 容 简 介

本书是讲述公理集论基础知识的一份讲义，内容包括集论的公理化，序数与基数，连续统假设的相对无矛盾性与相对独立性等．取材精练，论证严谨、完整．

练习题附有提示或解答．

可用作数学系研究生及高年级本科生教材或教学参考书，并可供数学教师和有关研究人员参考．



前　言

本书由公理集论这门课程的讲稿修改而成，目的是为数学系研究生提供一种篇幅不大、内容精选的基础教材或教学参考书.

集论作为数理逻辑的一个分支，是数学与逻辑的交会点. 集论的建立和发展深刻地改变了整个数学的面貌.

德国数学家 G.Cantor (1845 — 1918) 是集论的创始人. 他在关于三角级数展开唯一性的研究中开始了对无限集的探索. 他勇敢地向数学上的一种传统观念挑战，这种传统观念认为不能把实无限作为数学的研究对象. Cantor 卓有成效地对实无限进行了细致的考察，成功地对它们进行分类，取得了丰富的研究成果. 关于实无限，他曾说："我是经过多年科学上的努力和研究，几乎违背我的意愿……，逻辑地被迫承认的." (王宪钧:《数理逻辑引论》，279页) .

数学精确地表现运动，不能局限于有限. 把实无限作为自己研究对象的集论不是偶然出现的，而是数学发展到更高阶段的必然产物.

本世纪初集论中关于悖论的研究促进了公理集论的建立. 在公理集论随后的迅速发展中贯穿的一条主线是连续统假设的真假问题. 这个问题一百多年前由 Cantor 提出，在 Hilbert 著名的 1900 问题表中列于第一 . K.Gödel 于 30 年代与 P.J.Cohen 于 60 年代关于这个问题分别取得的重要研究成果皆属本世纪最杰出的数学成就.

现今的公理集论已好比是群峰耸立层峦叠嶂的风景区. 书中定的目标是：攀登其中的两座主峰 —— 连续统假设的相对无矛盾性与相对独立性. 较难的攀登大体上从 6.1 节开始. 书中所涉及

的证明都力求完整，并力求使每个攀登处都有合适的阶梯.

假定读者已有逻辑演算与朴素集论的初步知识.

中国科学技术大学研究生院高恒珊教授、中国科学技术大学李炯生教授曾阅读过本书的初稿，并提出宝贵意见. 此外，北京工业大学杨安洲教授曾给予作者以支持. 在此谨向以上各位致以谢意.

最后要特别感谢刘卫东、余华敏等同志，他们为提高本书质量付出了辛勤的劳动.

汪芳庭

1994 年 4 月



目　次

1 集论的公理化

让我们暂且按朴素的集合概念来谈论集.

例 1 所有拉丁字母构成一个集 α:

$$\alpha = \{a, b, c, \cdots, x, y, z\}$$

α 有 26 个元素: $a \in \alpha$, $b \in \alpha$, $\cdots$, $z \in \alpha$. 但 α 本身不在上述字母之列, 故 $\alpha \notin \alpha$.

例 2 所有含十个以上元素的集构成的集记作 β.

例 1中的集 α 有不止十个元素, 故 α 是例 2 中集 β 的一个元素: $\alpha \in \beta$. 具有十个以上的元素的集是很多的, 当然是不止十个. 也就是说例 2 中的集 β 有不止十个成员. 按 β 的定义, β 是 β 自己的一个元素: $\beta \in \beta$!

1902年, 英国数理逻辑学家 Russell 提出了下面有名的悖论. 考察由所有不是自己成员的集构成的集 b:

$$b = \{ \text{集 } a | \ a \notin a \}.$$

现问: 是 $b \in b$, 还是 $b \notin b$? 一回答问题, 立即导致矛盾:

$b \in b \Longrightarrow b \notin b$ (若 b 为 b 的成员, 则具有性质: $b \notin b$)

$b \notin b \Longrightarrow b \in b$ (b 若具有性质 $b \notin b$, 则 $b \in b$)

Russell 悖论的表述十分简单且明确无误, 这对本世纪初被认为是已可靠形成了的数学基础产生了冲击, 形成了所谓"第三次数学危机".

除 Russell 悖论外, 当时还出现了其他一些悖论. 出现这些悖论, 说明不加限制地使用"集合"一词会出毛病. 构成一个集, 必须要有一些限制, 必须要作一些规定. 这就导致了集论的公理化. 一般把由 Cantor 开始建立的未进行公理化的集论叫做朴素集论.

常用的集论公理系统是 ZF 公理系统. (加上选择公理以后, 叫

做 ZFC 系统.)这种系统首先由 Zermelo 于本世纪初提出，后由 Fraenkel 等人进行了修改和补充. 除了 ZF 系统，还有其他系统，例如 NBG (von Neumann-Bernays-Gödel) 系统. 在 NBG 系统中，有集和类这两种不同的形式对象.

本书中讨论的公理系统是 ZF. ZF 系统的形式对象只有集而没有类. 但后面我们会清楚，ZF 系统的这一特点并不妨碍我们在该系统中去研究类，当然，是在特定的意义下去研究.

在 ZF 系统中，我们把集理解为具有公理所规定的性质的对象. 集的元素也是集. 集的元素的元素仍然是集. 除了这种"世袭的集"，在集论的论域中没有别的东西.

1.1 ZF 系统的形式语言

除了 Russell 悖论，我们还会遇见另一种类型的麻烦.

先来看下面几个正整数:

第 10000 个素数，

数 987654321 的平方，

比 π^{10} 大的最小整数.

它们有个共同点: 用不超过一百个印刷符号就可明确定义. 印刷符号只有有限个. 用不超过一百个印刷符号能定义的正整数也只有有限个. 下面我们来定义一个正整数 z_0:

z_0 是用不超过一百个印刷符号不能定义的最小正整数.

但上面定义的这个正整数 z_0 恰恰是用不超过一百个印刷符号能定义的! (它上面的定义只用了 24 个符号.) 问题在于上面所用的语言中，"能定义"一词是不精确的.

我们介绍的公理系统 ZF(或 ZFC)是用形式语言来表达的形式系统. 所用的形式语言不同于自然语言，是一种人工语言，具有精确、不含混的特点.

ZF 系统的语言含有以下符号.

(1) 五个逻辑连接词: $\neg$(否定词), $\vee$(析取词), $\wedge$(合取词), $\rightarrow$(蕴涵词), $\leftrightarrow$(等价词).

(2) 两个量词: $\forall$(全称量词), $\exists$(存在量词).

(3) 两个关系词: $=$(等词), $\in$(属词).

(4) 可数个变元: $x, y, z, \cdots$(可带下标).

(5) 左括号(, 右括号).

由以上符号中若干有限个符号按一定的规则形成的符号串叫做公式. 规则有两条:

(Ⅰ) $x \in y$, $x = y$ 是公式, 叫做原子公式, 其中 x, y 可以换成其他变元;

(Ⅱ) 若 φ, ψ 是公式, 则

$\neg(\varphi)$, $(\varphi) \vee (\psi)$, $(\varphi) \wedge (\psi)$, $(\varphi) \rightarrow (\psi)$,

$(\varphi) \leftrightarrow (\psi)$, $\forall x(\varphi)$, $\exists x(\varphi)$

都是公式, 叫做更高层次的公式, 其中 x 可换成其他变元.

形式系统的命题和推理都是用这种语言表达的. 对这种形式语言可作多种解释. 但我们心目中的解释是:

变元 —— 集;	$\in$ —— 是 $\cdots$ 的元素;
$=$ —— 等于;	$\neg$ —— 否定;
$\vee$ —— (可兼)或;	$\wedge$ —— 与;
$\rightarrow$ —— 如果 $\cdots$, 那么 $\cdots$;	$\leftrightarrow$ —— 当且仅当;
$\forall x$ —— 对每个集 x $\cdots$;	$\exists x$ —— 存在集 x $\cdots$.

这样, 一个公式就可解释为某个关于集的命题. 例如, 公式

$$\forall x\ ((x \in a) \leftrightarrow (x \in b))$$

表示命题"对任意集 x, x 是集 a 的元素当且仅当 x 是集 b 的元素"; 公式

$$\exists x\ \forall y\ (\neg(y \in x))$$

表示命题"存在着没有任何成员的集". 与此同时, 可以把关于集的命题翻译成公式. 例如, 命题"存在把一切集作为自己成员的

集”(不论其真假)可翻成公式

$$\exists x\ \forall y\ (y \in x).$$

命题“存在着以集 a 和集 b 为仅有元素的集”可翻成公式

$$\exists x\ \forall y\ ((y \in x) \leftrightarrow ((y = a) \vee (y = b))).$$

在不引起混淆时，可省去公式中的一些括号. 公式

$$\neg(x = y) \quad 与 \quad \neg(x \in y)$$

常被分别写作

$$x \neq y \quad 与 \quad x \notin y.$$

为了方便，常在公式中引进一些缩写. 例如常把公式

$$\exists x\ (x \in a \wedge \varphi(x)) \quad 与 \quad \forall x\ (x \in a \rightarrow \varphi(x))$$

分别缩写为

$$\exists x \in a\ \varphi(x) \quad 与 \quad \forall x \in a\ \varphi(x).$$

把公式

$$\exists x\ (\varphi(x) \wedge \forall y\ (\varphi(y) \rightarrow y = x))$$

缩写为

$$\exists! x\ \varphi(x).$$

意思是: “唯一存在具有性质 φ 的 x.”有时甚至还在公式中夹进一些普通的语言 (必要时可以消去). 这样做可使公式的意义更容易理解; 不这样做, 公式就会写得很长, 难于阅读.

关于集论形式语言的进一步讨论见 5.1 节.

1.2 外延公理与内涵公理

我们开始讨论 ZF 公理系统，其中的公理是逐步引入的.

(ZF1) **外延公理**

$$\forall x\ (x \in a \leftrightarrow x \in b) \rightarrow a = b$$

这条公理是个蕴涵式，根据等词的可替换性，此式的反方向

也成立:

$$a = b \rightarrow \forall x\,(x \in a \leftrightarrow x \in b)$$

合起来, 有

$$\forall x\,(x \in a \leftrightarrow x \in b) \leftrightarrow a = b.$$

根据外延公理, 二集相等, 指它们有完全相同的成员; 任何集都由它的成员完全确定. 外延公理作为集论的第一公理很好地服务于数学, 表现了数学思维具有精确性的特点.

引进缩写 $a \subset b$, 它代表公式

$$\forall x\,(x \in a \rightarrow x \in b),$$

于是外延公理可写成

$$(a \subset b \wedge b \subset a) \rightarrow a = b.$$

为证等式 $a = b$, 可分开证 $a \subset b$ 和 $b \subset a$.

现在希望能具体地构造出集来. 构造出的集应是在我们的语言中能精确规定的. 常用的构造方式是使用下面的内涵公理.

(ZF2) **内涵公理**

$$\forall s\,\exists y\,\forall x\,(x \in y \leftrightarrow x \in s \wedge \varphi(x)),$$

其中 $\varphi(x)$ 是任一不含有变元 y 的公式.

内涵公理的含义是: 用已知的性质 $\varphi(x)$ 可以形成一已知集 s 的子集 y, 这个 y 由 s 中具有性质 $\varphi(x)$ 的那些元素构成. 这里要求公式 $\varphi(x)$ 中不含变元 y, 是为了避免变元干扰: 公理所断言存在的集 y 不应预先出现在 $\varphi(x)$中.

内涵公理通常又称作概括公理或分离公理.

注意(ZF2)不是单独的一条公理, 而是一种公理模式, 其中含有无数条公理 —— 每个公式 $\varphi(x)$ 都对应于一条公理.

命题 1 **对给定的集 s 和公式 $\varphi(x)$, 由内涵公理(ZF2)所断言存在的集 y 是唯一存在的, 即**

$$\exists!\,y\,\forall x\,(x \in y \leftrightarrow x \in s \wedge \varphi(x)).$$

证明 对给定的 s 和 $\varphi(x)$, 设 y 和 z 都是(ZF2)所断言存在

的集，我们有

$$\forall x\,(x \in y \leftrightarrow x \in s \wedge \varphi(x)) \quad 及$$
$$\forall x\,(x \in z \leftrightarrow x \in s \wedge \varphi(x)).$$

由此得

$$\forall x\,(x \in y \leftrightarrow x \in z),$$

再由外延公理(ZF1)得 $y = z$.

证 毕

有了命题 1，我们可按通常的习惯将(ZF2)中的

$$\forall x\,(x \in y \leftrightarrow x \in s \wedge \varphi(x))$$

缩写成

$$y = \{x \mid x \in s \wedge \varphi(x)\}$$

或

$$y = \{x \in s \mid \varphi(x)\},$$

等式右边 $\{x \in s \mid \varphi(x)\}$ 表示(ZF2)所断言存在的集，它是唯一的. 每逢遇见

$$t \in \{x \in s \mid \varphi(x)\},$$

我们可将它改用原来的语言写成

$$t \in s \wedge \varphi(t).$$

内涵公理(ZF2)现可写成

$$\forall s\, \exists y\, (y = \{x \in s \mid \varphi(x)\}).$$

在公理化以前，人们常自由地形成集 $\{x \mid \varphi(x)\}$，其中 $\varphi(x)$ 是关于 x 的某种性质. 我们已经看到，这种不加限制地形成集的方式导致了 Russell 悖论的产生：令 $b = \{x \mid x \notin x\}$，则得 $b \in b \leftrightarrow b \notin b$. 根据(ZF2)的要求，不能说$\{x \mid \varphi(x)\}$ 一定是集($\{x \mid x \notin x\}$ 则肯定不是集). 应用(ZF2)，必须先给定集 s，在 s 内部可用公式 $\varphi(x)$ 去形成 s 的子集.

命题 2 不存在把一切集都作为自己元素的集，即

$$\neg \exists s\, \forall y\, (y \in s).$$

证明 只用证明：对于任何集 s，都存在着不是 s 的成员的

集. 任给集 s, 作集

$$b = \{x \in s \mid x \notin x\}.$$

按照(ZF2), b 是集, 是 s 中所有具有性质"$x \notin x$"的成员 x 所构成的 s 的子集. 下面证明 $b \notin s$, 即 s 并非把一切集作为自己的成员. 事实上, 假设 $b \in s$ 便导致矛盾:

$b \in b \longrightarrow b \notin b$ 　　($b \notin b$ 是 b 的成员的性质)

$b \notin b \longrightarrow b \in b$ 　　(由 $b \in s$ 及 $b \notin b$ 可知 $b \in b$)

证　毕

分析命题 2 的结论和它的证明便可看到, 有了内涵公理, Russell 悖论就不会出现. 要规定一个集, 不能光凭一个语句, 而是手头上预先有一个集 s, 再加上一条性质. 命题2 指出, 包含一切集的集 s 不存在. 若有这样的 s, 则内涵公理中的"$x \in s$"便成了虚设, 用内涵公理形成集的方式与无限制地形成集 $\{x \mid \varphi(x)\}$ 的方式并无区别, 于是 Russell 悖论又可重演了.

至此我们尚未见到一个具体的集. 第一个具体的集是由下面的命题3 给出的.

命题 3　　唯一存在没有任何元素的集, 即

$$\exists!\, y\, \forall x\, (x \notin y)$$

证明　将(ZF2)中的 $\varphi(x)$ 取为 $x \neq x$, 并将(ZF2)中的 s 取为任意一个集, 则(ZF2)及命题1 断言了

$$\exists!\, y\, \forall x\, (x \in y \leftrightarrow x \in s \wedge x \neq x),$$

即

$$\exists!\, y\, (y = \{x \in s | x \neq x\}).$$

y就是所求的没有任何元素的集. 事实上, 若有 $x \in y$, 则有 $x \neq x$. 与 $x = x$ 矛盾.

证　毕

定义 1　　(空集)

命题 3 所断言唯一存在的集叫做空集, 记作 ϕ.

定义毕

在 ZF 语言的字母表中并没有 ϕ 这个符号. 我们根据命题 3 引入这个新符号, 是为了方便. 如有必要可随时消去它, 从而不必扩大原来的字母表. 事实上, “$y = \phi$”可用“$\forall x(x \notin y)$”消去; “$\phi \in z$”可用“$\exists y(y = \phi \wedge y \in z)$”消去. 以后在通过定义引入新符号时不再一一说明类似的消去方法. 当然, 每引入一个新符号都须有根据, 且须符合可消去原则.

1.3 无序对与有序对

空集 ϕ 是我们第一个得到的具体的集. 除了 ϕ 是否还存在别的集? 由前面两个公理得不出结论. 为了得到新的集, 还要有新公理.

(ZF3) **无序对公理**

$$\exists s\ (a \in s\ \wedge\ b \in s).$$

无序对公理的含义是: 已知集 a 和集 b, 一定存在以 a 和 b 为元素的集 s. 根据(ZF3)与(ZF2), 可作出如下定义.

定义 1 (无序对)

设有集 a, b. 取集 s 使 $a, b \in s$((ZF3)肯定了这种 s 的存在性). 由 a 和 b 形成的无序对, 用 $\{a,b\}$ 表示, 指集

$$\{a,b\} = \{x \in s | x = a\ \vee\ x = b\}.$$

定义毕

定义 1 用了(ZF3), 还用了(ZF2). 定义式右边的集是内涵公理(ZF2)断言存在的. 在使用(ZF2)时, 公式 $\varphi(x)$ 取为

$$x = a\ \vee\ x = b.$$

由定义 1 知无序对 $\{a,b\}$ 以 a 和 b 为仅有的成员:

$$x \in \{a,b\}\ \leftrightarrow\ x = a\ \vee\ x = b.$$

当 $a = b$ 时, 记 $\{a\} = \{a,a\}$, 叫做由集 a 形成的独元集.

有了无序对公理(ZF3)，可以用它去形成新的集，如 $\{\phi\}$，$\{\phi,\{\phi\}\}$，$\{\{\phi\}\}$，$\{\phi,\{\{\phi\}\}\}$，等等.

在无序对 $\{a,b\}$ 中，a和 b 的地位是平等的：$\{a,b\}=\{b,a\}$. 如果想要让 a 和 b 的地位有所区别，应如何做? 为使集论服务于数学，这是重要的事.

定义 2 (有序对)

以集 a 为先，集 b 为后的有序对，用 (a,b) 表示，指集

$$(a,b)=\{\{a\},\{a,b\}\}.$$

定义毕

这样来定义有序对，理由是清楚的：从 $\{\{a\},\{a,b\}\}$ 中，我们看到集 a 和集 b，还看到了 a 和 b 的地位有所不同. 这样定义的有序对具有性质：

命题 1 $(a,b)=(c,d)\ \rightarrow\ a=c\ \wedge\ b=d.$

证明 (1) $a=b$ 时，由 $(c,d)=(a,a)$ 得

$$\{\{c\},\{c,d\}\}=\{\{a\},\{a,a\}\}=\{\{a\},\{a\}\}=\{\{a\}\},$$

于是有 $\{c,d\}=\{a\}$，进而得 $c=d=a$.

(2) $a\neq b$ 时，$\{c\}\neq\{a,b\}$(否则$c=a=b$)，于是由

$$\{\{c\},\{c,d\}\}=\{\{a\},\{a,b\}\}$$

可得 $\{c\}=\{a\}$ 和 $\{a,b\}=\{c,d\}$，前者导致 $c=a$，进而由后者得 $b=d$.

证 毕

还可用其他不同的方式来定义有序对，并使之具有命题1 中的性质. 只要有此性质，不管构造方式如何，应用是一样的.

利用无序对公理(ZF3)可以形成很多新的集. 这种集的形式可能很复杂，但有个共同点：至多有两个成员. 要得到更大的集则要有新的公理.

练 习 一

1. 以下两种方式定义的有序对是否仍具有命题 1 中的性质?

(Ⅰ) $(a,b)=\{a,\{b\}\}$,

(Ⅱ) $(a,b)=\{\{\{a\},\phi\},\{\{b\}\}\}$.

1.4 并集公理与幂集公理

利用内涵公理(ZF2), 先来定义集的两种运算 —— 差与交.

定义 1 **(差与交)**

集 a 与集 b 的差: $a-b=\{x\in a\mid x\notin b\}$;

集 a 与集 b 的交: $a\cap b=\{x\in a\mid x\in b\}$.

定义毕

根据(ZF2), $a-b$ 和 $a\cap b$ 都是集. 在用(ZF2)时, 取$s=a$, 而公式 $\varphi(x)$ 分别为 $x\notin b$ 和 $x\in b$.

利用差和交这两种运算可形成新的集, 但都是在已知的较大的集内部形成较小的集.

现在我们还没有根据说 $\{x|x\in a\ \vee\ x\in b\}$ 是集. 它是把 a 的元素和 b 的元素合并到一起构成的对象, 我们当然希望它是集. 不仅如此, 我们还希望把更多的集的元素合并在一起而成的对象也是集, 这就需要有如下构造新集的原则:

(ZF4) **并集公理**

$$\exists s\,\forall x\,\forall y\,(x\in y\ \wedge\ y\in a\ \rightarrow\ x\in s).$$

(ZF4)是说, 对已知的集 a, 存在着集 s, 凡是 a 的元素的元素都是 s 的成员. 任取(ZF4)断言存在的 s, 便可把 a 的并集作为 s 的子集来定义:

定义 2 **(并)**

集 a 的并, 用 $\cup a$ 表示, 指集

$$\cup a = \{x \in s | \exists y \in a(x \in y)\},$$

其中 s 是由(ZF4)断言存在的集.

定义毕

集 $\cup a$ 是作为 s 的子集用内涵公理确定的, 它是由 a 的所有元素的元素合在一起而成. $\cup a$ 的元素就是 a 的某个成员的元素:

$$x \in \cup a \ \leftrightarrow \ \exists y \in a \ (x \in y).$$

常把 $\cup a$ 写成 $\cup\{x|x \in a\}$ 或 $\cup_{x\in a}x$, 把 $\cup\{a, b\}$ 写成 $a \cup b$. 我们有

$$\cup\phi = \phi, \quad \cup\{a\} = a.$$

有了并集公理和并集定义, 便可构造有更多成员的集. 例如,

$$\{a, b, c\} = \cup\{\{a, b\}, \{c\}\},$$

$$\{a, b, c, d\} = \cup\{\{a, b, c\}, \{d\}\}.$$

定义 3 (一般交)

集 a 的一般交(简称为 a 的交), 用 $\cap a$ 表示, 指集

$$\cap a = \{x \in \cup a \mid \forall y \in a \ (x \in y)\}.$$

定义毕

a 的交 $\cap a$ 是作为 a 的并 $\cup a$ 的子集用内涵公理定义的, 不需要有新的公理. $\cap a$ 是由 a 的所有成员的全部公共元素组成. 常把 $\cap a$ 写作

$$\cap\{x|x \in a\} \quad \text{或} \quad \cap_{x\in a}x.$$

我们有

$$\cap\{a, b\} = a \cap b,$$

此式右边已由定义 1 规定过.

由定义, $\cap\phi = \phi$.

例 1 设 $a = \{\{\phi, \{\phi\}\}, \{\{\phi\}, \{\{\phi\}\}\}, \{\{\phi\}\}\}$, 则

$$\cup a = \{\phi, \{\phi\}, \{\{\phi\}\}\},$$

$$\cap a = \{\{\phi\}\}.$$

下面的幂集公理可使我们由已知集以更快的速度形成更大的集.

(ZF5) **幂集公理**

$$\exists s\, \forall x\, (x \subset a \ \rightarrow \ x \in s).$$

幂集公理是说: 对任一集 a, 存在集 s, 此 s 能容纳 a 的所有子集. 任取这样的 s, 用内涵公理便可在 s 内部定义 a 的幂集:

定义 4 **(幂集)**

集 a 的幂集 $\mathcal{P}(a)$ 指由 a 的所有子集形成的集

$$\mathcal{P}(a) = \{x \in s \mid x \subset a\},$$

其中 s 是(ZF5)所断言存在的集.

定义毕

例如,

$\mathcal{P}(\phi) = \{\phi\}$,

$\mathcal{P}(\{a, b\}) = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$.

在某种意义上, $\cup$ 是 $\mathcal{P}$ 的逆运算, 这是因为有公式

$$\cup\mathcal{P}(a) = a.$$

此公式的证明如下:

$$\begin{aligned} x \in \cup\mathcal{P}(a) \quad & \leftrightarrow \quad \exists y \in \mathcal{P}(a)\ (x \in y) \\ & \leftrightarrow \quad \exists y \subset a\ (x \in y) \\ & \leftrightarrow \quad x \in a. \end{aligned}$$

但把公式中 $\cup$ 与 $\mathcal{P}$ 的次序交换一下, 等式就不一定成立了.

一般说 $\mathcal{P}(\cup a) \neq a$. 但总有 $a \subset \mathcal{P}(\cup a)$, 这是因为

$$\begin{aligned} x \in a \quad & \rightarrow \quad \forall y\ (y \in x \ \rightarrow \ y \in \cup a) \\ & \rightarrow \quad x \subset \cup a \\ & \rightarrow \quad x \in \mathcal{P}(\cup a). \end{aligned}$$

例 2 $x \in a \ \wedge \ y \in b \quad \rightarrow \quad (x, y) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(a \cup b))$. 事实上,

$$\begin{aligned} x \in a \wedge y \in b \quad & \rightarrow \quad \{x\}, \{x, y\} \subset a \cup b \\ & \rightarrow \quad \{x\}, \{x, y\} \in \mathcal{P}(a \cup b) \\ & \rightarrow \quad \{\{x\}, \{x, y\}\} \subset \mathcal{P}(a \cup b) \\ & \rightarrow \quad (x, y) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(a \cup b)). \end{aligned}$$

若集 a 有 n 个成员，则 a 的幂集有 2^n 个成员，所以利用幂集运算 $\mathcal{P}$ 可以得到很大的集. 但至此(利用现有的公理(ZF1)–(ZF5))我们能具体拿出来的还只是有限集.

练 习 二

进行以下计算:

1. $\cup\{\{a,b,c\},\{a,d,e\},\{a,f\}\}$
2. $\cap\{\{a,b,c\},\{a,d,e\},\{a,f\}\}$
3. $\cap\cap(a,b)$
4. $(\cap\cup(a,b))\cup(\cup\cup(a,b)-\cup\cap(a,b))$
5. 若 $a\subset b$, $(a\cap b)\cup(a-b)=?$
6. $\mathcal{P}\,\mathcal{P}\,(\phi)$
7. $\mathcal{P}\,\mathcal{P}\,\mathcal{P}\,(\phi)$
8. $\mathcal{P}\,\mathcal{P}\,\mathcal{P}\,\mathcal{P}(\phi)$
9. $\cap\{\mathcal{P}\,\mathcal{P}\,\mathcal{P}\,(\{\phi\}),\mathcal{P}\,\mathcal{P}\,(\{\phi\}),\mathcal{P}\,(\{\phi\})\}$
10. $\cup\,(\mathcal{P}\,(\{\phi,\{\phi\}\})-\{\phi,\{\phi\}\})$

1.5 关系与映射

利用有序对的概念可以定义 Descartes 积集而不需要新的公理. 在集论的框架内表现数学， Descartes 积集是个重要概念. 回忆 1.4 节例 2 中证明的事实:

$$x\in a\ \wedge\ y\in b\quad\rightarrow\quad(x,y)\in\mathcal{P}\,\mathcal{P}\,(a\cup b).$$

这个事实使得下面的定义是合理的.

定义 1 (Descartes 积)

由集 a 与集 b 形成的 Descartes 积集，用 $a\times b$ 表示，指集

$$a\times b=\{(x,y)\mid x\in a\ \wedge\ y\in b\}.$$

定义毕

$a \times b$ 作为 $\mathcal{P}\,\mathcal{P}\,(a \cup b)$ 的子集由内涵公理肯定了它的存在.一般说，$a \times b \neq b \times a$. 由定义,

$$a \times b = \phi \quad \leftrightarrow \quad a = \phi \ \vee \ b = \phi.$$

为了用集论表现数学中各种对象之间的形形色色的具体关系，先要研究抽象的集的关系.

定义 2　　(关系)

若 $r \subset a \times b$，则 r 叫做集 a 到集 b 的关系.

定义毕

a 到 b 的一个关系 r 是由一些有序对组成的，这些有序对的第一分量取自 a，第二分量取自 b.

因 $\phi \subset a \times b$，故 ϕ 也是一个关系.

有时把 $(x,y) \in r$ 写成 xry.

关系 r 的定义域 $\mathrm{Dom}(r)$，值域 $\mathrm{Ran}(r)$ 及关系 r 的逆关系 r^{-1} 分别指

$$\begin{aligned}
\mathrm{Dom}(r) &= \{x \in a \mid \exists y \in b\ (x,y) \in r\},\\
\mathrm{Ran}(r) &= \{y \in b \mid \exists x \in a\ (x,y) \in r\},\\
r^{-1} &= \{(y,x) \mid (x,y) \in r\}.
\end{aligned}$$

$c \subset a$ 时，r 在 c 上限制，用 $r\lceil c$ 表示，指

$$r\lceil c = \{(x,y) \in r \mid x \in c\},$$

此时 c 在 r 之下的象，用 $r[c]$ 表示，指

$$\begin{aligned}
r[c] &= \mathrm{Ran}\ (r\lceil c)\\
&= \{y \in b \mid \exists x \in c \text{ 使 } (x,y) \in r\}.
\end{aligned}$$

又设 s 是 b 到 c 的关系. r 与 s 的复合，用 $s \circ r$ 表示，指

$$s \circ r = \{(x,z) \mid \exists y \in b((x,y) \in r \wedge (y,z) \in s)\},$$

所以 $s \circ r$ 是 a 到 c 的关系. 我们有

$$\begin{aligned}
&(s \circ r)^{-1} = r^{-1} \circ s^{-1},\\
&\mathrm{Dom}\ (r^{-1}) = \mathrm{Ran}\ (r),\\
&\mathrm{Ran}\ (r^{-1}) = \mathrm{Dom}\ (r).
\end{aligned}$$

$a \times a$ 的子集叫做 a 上二元关系.

下面定义的映射也称作为函数，是一种特殊的关系，是我们熟悉的函数概念的推广.

定义 3　(映射)

若 a 到 b 的关系 f 具有性质: 对任意 $x \in a$，有唯一的 $y \in b$ 使 $(x, y) \in f$，则 f 叫做 a 到 b 的映射(或函数).

定义毕

定义中映射 f 所具有的性质可写成

$$\forall x \in a \ \exists! \ y \in b \ ((x, y) \in f).$$

f 是 a 到 b 的映射，记作 $f: \ a \longrightarrow b$.

$(x, y) \in f$ 有时写作 $x \longmapsto y$，还常按习惯写成 $y = f(x)$. y 叫做 x 在 f 之下的象(或值)，x 叫做 y 在 f 之下的原象.

注意映射的定义的特点. 按通常对函数的理解，函数是一种对应规律，是自变量与因变量之间的对应规律. 现在的定义撇开了这种对应关系的具体含义，而抓住这种对应规律的外延 —— 所有由 x(“输入”)和 y(“输出”)组成的属于 f 的有序对 (x, y). 按通常的理解，这里的映射应是函数的“图形”.

映射 $f: \ a \longrightarrow b$ 是特殊的关系. f 的定义域 $\mathrm{Dom}(f) = a$. f 的值域 $\mathrm{Ran}(f) \subset b$，或写作 $f[a] \subset b$.

若 $f[a] = b$，则映射 f 叫做 a 到 b 的满射.

若 a 的不同元素在 f 之下的象各不相同，即

$$\forall x_1, x_2 \in a \ (x_1 \neq x_2 \ \rightarrow \ f(x_1) \neq f(x_2)),$$

则称 f 是单射.

映射 $f: \ a \longrightarrow b$ 与 $g: \ b \longrightarrow c$ 的复合记为 $g \circ f: \ a \longrightarrow c$. 它的定义式为

$$g \circ f(x) = g(f(x)).$$

易知单射的复合仍是单射.

映射 f 的逆关系 $f^{-1} = \{(y, x) | (x, y) \in f\}$ 不一定是 $\mathrm{Ran}(f)$ 到 a 的映射. 但若 f 是 a 到 b的单射，则 f^{-1} 是 $\mathrm{Ran}(f)$ 到 a 的映射，叫做 f 的逆映射(或反函数).

若映射 $f: a \longrightarrow b$ 既是单射又是满射，则叫做 a 到 b 的双射. 这时 a 中每个元素都在 b 中有一个象，且只有一个象(f 是映射)；b 中每个元素都在 a 中有一个原象(f 是满射)，且只有一个原象(f 是单射). 这时易知 f^{-1} 是 b 到 a 的双射. 两个双射的复合仍是双射.

设 $c \subset a$. 若 g 是 f 在 c 上的限制，即 $g = f \lceil c$，则有

$$\forall x \in c\ (g(x) = f(x)),$$

此时 f 叫做 g 的扩张.

常用符号 ${}^a b$ 表示 a 到 b 的映射的全体：

$${}^a b = \{f | f : a \longrightarrow b\}.$$

有时 ${}^a b$ 也写作 b^a.

练　习　三

1. 设 a, b 分别有 m 个元素和 n 个元素. 从 a 到 b 的关系总共有多少个? 列出 $a = \{x, y, z\}$ 到 $b = \{t\}$ 的所有关系.

2. 设 $f = \{(\phi, \{\phi, \{\phi\}\}), (\{\phi\}, \phi)\}$，$f$ 是映射吗？写出 $\mathrm{Dom}(f)$，$\mathrm{Ran}(f)$，$f(\phi)$，$f[\phi]$，$f[\{\phi\}]$，$f\lceil\phi$，$f\lceil\{\phi\}$，$f\lceil\{\phi, \{\phi\}\}$.

3. 设 $a = \{x, y, z\}$，$b = \{s, t\}$. a 到 b 的关系共有多少个? 写出其中所有 a 到 b 的映射(用表列出). 其中有几个满射? 有没有单射?

4. 设 $a = \{x, y, z\}$. ${}^a a$有多少个元素? ${}^\phi a =$? ${}^a \phi =$?

2 序　数

2.1 偏序、全序与良序

数学中，序的概念是重要的基本概念之一．当我们将有限对象的性质推广到无限的对象时，序的概念更起重要的作用．

定义 1　**(偏序，偏序集)**

设 r 是 a 上的二元关系：$r \subset a \times a$．若 r 具有性质：

(Ⅰ)　反自反性　$\forall x \in a\ (x,\ x) \notin r$,

(Ⅱ)　可递性

$\forall x\ y\ z \in a\ ((x,\ y) \in r \wedge\ (y, z) \in r\ \rightarrow\ (x,\ z) \in r)$,

则把 r 叫做 a 的一个偏序，$(a,\ r)$ 叫做偏序结构,并称 a 为 r - 偏序集，或简称为偏序集．

定义毕

下面常把 $(x,\ y) \in r$ 写成 $x < y$，偏序的性质可写成：

(Ⅰ)　反自反性　$\forall x \in a\ x \nless x$,

(Ⅱ)　可递性　$\forall x\ y\ z \in a\ (x < y\ \wedge\ y < z\ \rightarrow\ x < z)$.

命题 1　设 a 是偏序集．对任意 x，$y \in a$，以下三种情形至多出现一种：

$$x < y, \quad x = y, \quad y < x.$$

证明　以下情形皆与偏序的反自反性相矛盾：

$x < y\ \wedge\ x = y\ \rightarrow\ y < y$　(由等词性质)

$x = y\ \wedge\ y < x\ \rightarrow\ y < y$　(由等词性质)

$x < y\ \wedge\ y < x\ \rightarrow\ x < x$　(由可递性)

证　毕

$x < y$ 也写成 $y > x$.

$x \leq y$ 或 $y \geq x$ 表示 $x < y \ \vee \ x = y$.

对偏序集 a 及 $x \in a$,

1° 若 $\forall y \in a \ y \not< x$, 则称 x 是 a 的极小元;

2° 若 $\forall y \in a \ x \leq y$, 则称 x 是 a 的最小元;

3° 若 $\forall y \in a \ x \not< y$, 则称 x 是 a 的极大元;

4° 若 $\forall y \in a \ y \leq x$, 则称 x 是 a 的最大元.

对一般的偏序集, 并非集中任意两元素都可比大小. 偏序集的最小元一定是极小元, 但极小元不一定是最小元. 最小元若有, 则唯一; 但极小元却可能不唯一. 极大元与最大元的关系也如此.

二元关系"$\subset$ 但 $\neq$"是任何集 a 的偏序. 按此偏序, 若取

$$a = \{\phi, \{\phi\}, \{\{\phi\}\}, \{\phi, \{\phi\}\}\},$$

则 ϕ 是 a 的最小元, $\{\phi, \{\phi\}\}$ 是 a 的最大元. 若取

$$a = \{\{\phi\}, \{\{\phi\}\}, \{\phi, \{\phi\}\}\},$$

则 a 没有最小元, 却有两个极小元: $\{\phi\}$ 和 $\{\{\phi\}\}$. 若取

$$a = \{\phi, \{\phi\}, \{\{\phi\}\}\},$$

则 a 没有最大元, 但有两个极大元: $\{\phi\}$ 和 $\{\{\phi\}\}$.

把 a 的偏序限制在 a 的子集 b 上, 便得 b 的偏序. 若有 a 中元素 x 满足

$$x \leq b \text{ 中任一元素},$$

则 x 叫做 b 在 a 中的下界. 下界可以属于 b, 也可以不属于 b. 同样可定义上界.

定义 2 **(全序, 全序集)**

若 a 上二元关系"$<$"具有性质:

(I) 反自反性 $\forall x \in a \ x \not< x$,

(II) 可递性 $\forall x, y, z \in a \ (x < y \ \wedge \ y < z \ \rightarrow \ x < z)$,

(III) 三分律 $\forall x, y \in a \ (x < y \ \vee \ x = y \ \vee \ y < x)$,

则"$<$"叫做 a 的全序, $(a, <)$ 叫做全序结构, a 叫做全序集.

定义毕

全序就是满足三分律的偏序. 在全序集 a 的任意元素间可以比出大小. 结合命题 1, 对 a 的任意元素 x, y, 以下三者必居且只居其一: $x<y$, $x=y$, $y<x$.

全序集也叫做线序集, 或简称为序集. 全序集的子集当然也是全序集. 全序集的极小 (大)元就是最小(大)元.

下面定义的良序也称整序, 是超穷论法的又一重要概念.

定义 3 (良序,良序集)

若 a 上的二元关系"$<$"具有性质:

(Ⅰ) 反自反性 $\forall x \in a\ (x \nless x)$,

(Ⅱ) 可递性 $\forall x,\ y,\ z \in a\ (x<y\ \wedge\ y<z\ \rightarrow\ x<z)$,

(Ⅲ) 三分律 $\forall x,\ y \in a\ (x<y\ \vee\ x=y\ \vee\ y<x)$,

(Ⅳ) 良基性 a 的任一非空子集有极小元,

则把"$<$"叫做 a 的良序, $(a,\ <)$ 叫做良序结构, a 叫做良序集.

定义毕

良序就是具有良基性的全序. 结合三分律和良基性, 良序集的任一非空子集都有最小元 (不仅是极小元).

最简单的良序集是空集 ϕ.

设 $b \subset a$. 把 a 的良序限制在 b 上, 则 b 也是良序集.

我们常希望给集建立良序, 是因为归纳法可推广到一般良序集.

定理 1 (超限归纳法)

设 a 是良序集, $\varphi(x)$ 为任一含 x 的公式, 则有

$$\forall x \in a\ (\forall y \in a\ (y<x \rightarrow \varphi(y)) \rightarrow \varphi(x)) \\ \rightarrow \forall x \in a\ \varphi(x).$$

证明 作集

$$b=\{x \in a \mid \neg \varphi(x)\}.$$

(反证)假设存在 x 使 $\varphi(x)$ 不成立, 即 $b \neq \phi$, 那么 b 有最小元, 设为 x_0. $x_0 \in b$, 故 $\varphi(x_0)$ 不成立; x_0 是最小的, 比 x_0 小的任一 y 都使 $\varphi(y)$ 成立. 这时由已知条件, $\varphi(x_0)$ 又必须成立. 矛

盾.

证 毕

用超限归纳法证明形为 $\forall x \in a\ \varphi(x)$ 的命题, 步骤与通常的归纳法相同. 任取 $x \in a$, 先作归纳假设: $y < x$ 时, $\varphi(y)$ 都成立. 然后证明 $\varphi(x)$ 也成立. 对 a 的最小元 x_0 无归纳条件可用, 须直接验证 $\varphi(x_0)$ 成立.

命题 2 设 a 为良序集. 若映射 $f: a \longrightarrow a$ 是保序的, 即

$$x_1 < x_2 \ \rightarrow\ f(x_1) < f(x_2),$$

则对任意 $x \in a$ 有 $x \leq f(x)$.

证明 为证 $\forall x \in a\ (x \leq f(x))$, 对 $x \in a$ 归纳.

对 a 的最小元 x_0, $x_0 \leq f(x_0)$ 显然成立.

作归纳假设: 当 $y < x$ 时有 $y \leq f(y)$.

下证 $x \leq f(x)$. (反证)假设

$$f(x) < x. \tag{1}$$

由 (1) 及归纳假设得

$$f(x) \leq f(f(x)). \tag{2}$$

又由 (1) 及 f 的保序性得

$$f(f(x)) < f(x). \tag{3}$$

(2) 与 (3) 矛盾.

证 毕

命题 2 可用下面更为直接的形式证明. 作 $b = \{x \in a \mid f(x) < x\}$, 只用证 $b = \phi$. (反证)假设 $b \neq \phi$. 作为 a 的非空子集, b 有最小元, 记为 x_0. $x_0 \in b$, 故 $f(x_0) < x_0$. 由 f 的保序性得 $f(f(x_0)) < f(x_0)$, 从而 $f(x_0) \in b$, 这与 x_0 在 b 中的最小性矛盾.

定义 4 (同构)

设 a, b 分别以 $<_a$ 与 $<_b$ 为各自的良序. 若存在 a 到 b 的保序双射 φ, 则说 a 与 b 同构, 记作 $a \overset{\varphi}{\sim} b$, 或简记作 $a \sim b$, 并说 φ 是 a 到 b 的同构. φ 保序, 指

$$\forall x_1, x_2 \in a\,(x_1 <_a x_2 \ \rightarrow\ \varphi(x_1) <_b \varphi(x_2)).$$

定义毕

由定义即知良序集间同构的如下基本性质:

(I) 自反性 $a \overset{I}{\sim} a$ ($I: a \longrightarrow a$ 是恒等映射)

(II) 对称性 $a \overset{\varphi}{\sim} b \ \rightarrow\ b \overset{\varphi^{-1}}{\sim} a$,

(III) 可递性 $a \overset{\varphi}{\sim} b \wedge b \overset{\psi}{\sim} c \ \rightarrow\ a \overset{\psi\circ\varphi}{\sim} c$.

定义 5 (良序集的前段)

设 a 为良序集且 $x \in a$. 以 x 为限的 a 的前段, 用 a_x 表示, 指集

$$a_x = \{t \in a \mid t < x\}.$$

定义毕

a_x 是由 a 中所有小于 x 的元素构成的 a 的子集. 每说起 a 的前段 a_x, 自然有 $x \in a$, 且 $x \notin a_x$ (否则与序的反自反性矛盾). a_x 也是良序集, 但与 a 有不同的序结构:

命题 3 良序集 a 和它的任一前段 a_x 不同构.

证明 假设 $a \overset{f}{\sim} a_x$, f 是 a 到 a_x 的保序双射. 因 $f(x) \in a_x$, 由 a_x 的定义, $f(x) < x$. 但由命题 2 知 $x \leq f(x)$, 矛盾.

证 毕

命题 4 若 $a \overset{f}{\sim} b$ 且 $x \in a$, 则 $a_x \sim b_{f(x)}$.

证明 将 a 到 b 的保序双射 f 限制在 a_x 上, 便得 a_x 到 $b_{f(x)}$ 的保序双射 $f \lceil a_x$.

证 毕

命题 5 良序集前段的前段仍是该良序集的前段, 即

$$(a_x)_y = a_y.$$

证明 因 $y \in a_x$, $y < x$, 且因

$$a_x = \{t \in a \mid t < x\},$$

故当 $t < y$ 时有

$$t \in a_x \ \leftrightarrow\ t \in a,$$

由此得

$$(a_x)_y = \{t \in a_x | t < y\} = \{t \in a | t < y\} = a_y.$$

证 毕

命题 6 设 a, b 为良序集, 则以下三种情形至多出现一种:

(Ⅰ) $a \sim b$;

(Ⅱ) $a \sim b_y$, $y \in b$;

(Ⅲ) $b \sim a_x$, $x \in a$.

证明 由命题 3, (Ⅰ) 与 (Ⅱ), (Ⅰ) 与 (Ⅲ) 不会同时成立.

现假设 (Ⅱ) 与 (Ⅲ) 同时成立. 由 (Ⅱ), 设 $a \overset{f}{\sim} b_y$. 则由命题 4 知

$$a_x \sim (b_y)_{f(x)} = b_{f(x)},$$

由此及 (Ⅲ) 即得 $b \sim b_{f(x)}$, 与命题 3 矛盾.

证 毕

下面建立的良序集基本定理是良序集之间关系的基本性质, 是序数理论的基础.

定理 2 (良序集基本定理)

设 a, b 是良序集. 以下三种情形必居其一.

(Ⅰ) $a \sim b$;

(Ⅱ) $\exists y \in b \quad a \sim b_y$;

(Ⅲ) $\exists x \in a \quad b \sim a_x$.

证明 作 a 到 b 的关系 $f (\subset a \times b)$:

$$f = \{(x, y) | x \in a, y \in b, a_x \sim b_y\}.$$

记 $d = \mathrm{Dom}(f)$, $r = \mathrm{Ran}(f)$. 证明分成以下几点.

1° f 是 d 到 r 的映射.

事实上, 对任意 $x \in d$, 存在 $y \in b$ 使 $(x, y) \in f$, 从而 $y \in r$, 且 y 是唯一的, 因为

$$(x, y_1) \in f \wedge (x, y_2) \in f \rightarrow a_x \sim b_{y_1} \wedge a_x \sim b_{y_2}$$
$$\rightarrow y_1 = y_2 \quad (\text{由命题 } 3)$$

2° f 是单射. 事实上,

$$(x_1, y) \in f \land (x_2, y) \in f \to b_y \sim a_{x_1} \land b_y \sim a_{x_2}$$
$$\to x_1 = x_2.$$

3° f 是 d 到 r 的满射，因为 $\mathrm{Ran}(f) = r$.

4° f 是保序的. 事实上，设 d 中 $x_1 < x_2$，则对应于 r 中的 $y_1 < y_2$ ($y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$). 这是因为: 单射性使 $y_1 \neq y_2$. 假如 $y_2 < y_1$，则有

$$b_{y_1} \sim a_{x_1} = (a_{x_2})_{x_1}, \quad a_{x_2} \sim b_{y_2} = (b_{y_1})_{y_2}$$

这与命题 6 矛盾.

综合以上 1° — 4°，得到结果: $d \overset{f}{\sim} r$.

5° 下证 $d = a$ 与 $r = b$ 二者必居其一.

若 $d \neq a$, $a - d \neq \phi$，则 $a - d$ 有最小元，记为 x_0. 我们来证明 $d = a_{x_0}$. 先设 $x \in a_{x_0}$，$x < x_0$，这时 $x \in d$(注意 x_0 在 $a - d$ 中的最小性). 再设 $x \in d$，则 $x \neq x_0$(因 $x_0 \in a - d$). 这时要证 $x < x_0$，从而 $x \in a_{x_0}$. (反证)假设 $x > x_0$. 因 $x \in d$,由 d 和 f 的定义，存在 $y \in b$ 使 $a_x \overset{g}{\sim} b_y$. 又由命题 4 知 $a_{x_0} \sim b_{g(x_0)}$. 这说明 $(x_0, g(x_0)) \in f$. 从而 $x_0 \in d$，与 $x_0 \in a - d$ 矛盾.

同理可证当 $r \neq b$ 时 $r = b_{y_0}$，其中 y_0 是 $b - r$ 的最小元.

$d \neq a$ 与 $r \neq b$ 不能同时成立. 否则由

$$a_{x_0} = d \sim r = b_{y_0}$$

导致 $(x_0, y_0) \in f$. $x_0 \in d$，这与 $x_0 \in a - d$ 矛盾. 所以下面三种情形必居其一:

(Ⅰ) $a = d \land b = r$，此时，$a \sim b$，

(Ⅱ) $a = d \land b \neq r$，此时 $a \sim r = b_{y_0}$，y_0 是 $b - r$ 的最小元，

(Ⅲ) $a \neq d \land b = r$，此时 $b \sim d = a_{x_0}$，x_0 是 $a - d$ 的最小元.

证 毕

定理 2 告诉我们任意两个良序集都可进行比较.

练 习 四

1. 设 $a=\{x, y\}$. 试列出 a 的所有可能的偏序.

2. 设 $a=\{x, y, z\}$. a 有多少不同的偏序? 列出其中的全序.

3. 设 a 是良序集, 且存在双射 $f: a \longrightarrow b$. 证明集 b 是可良序的. (此时说 f 由 a 的良序诱导出 b 的良序.)

4. (同构的唯一性)设 a, b 为良序集, $a \overset{f}{\sim} b$ 且 $a \overset{g}{\sim} b$. 证明 $f=g$.

2.2 序数及其性质

在建立序数概念之前, 先引进可递集的概念.

定义 1 (可递集)

集 a 是可递集, 如果 a 的元素的元素还是 a 的元素, 即:

$$y \in x \in a \rightarrow y \in a.$$

定义毕

可递集的性质可等价写成以下各种形式:

$$\forall x \in a\ (x \subset a),$$
$$\forall x \in a\ (x \in \mathcal{P}(a)),$$
$$a \subset \mathcal{P}(a),$$
$$\cup a \subset a.$$

例 1 $a=\{\phi, \{\phi\}, \{\phi, \{\phi\}\}\}$ 是可递集.

$b=\{\phi, \{\phi\}, \{\phi, \{\phi\}, \{\{\phi\}\}\}\}$ 不是可递集.

(b 中缺少 $\{\{\phi\}\}$.)

序数是作为一种以关系"$\in$"为良序的特殊的可递集定义的:

定义 2 (序数)

$\in$ - 良序的可递集叫做序数. 或者说, 具有以下性质的集 α 叫做序数:

(Ⅰ) $\forall x \in \alpha\,(x \notin x)$ ($\in$ - 反自反性)

(Ⅱ) $\forall x, y, z \in \alpha\,(x \in y \in z \rightarrow x \in z)$ ($\in$ - 可递性)

(Ⅲ) $\forall x, y \in \alpha\,(x \in y \vee x = y \vee y \in x)$ ($\in$ - 三分律)

(Ⅳ) α 的任意非空子集 b 有 $\in$ - 最小元 ($\in$ - 良基性)

(Ⅴ) α 是可递集, 即 $\forall x \in \alpha\, \forall y \in x (y \in \alpha)$.

定义毕

后面如不作说明, 字母 $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$ 自动表示序数.

命题 1 $\forall x \in \alpha(\alpha_x = x)$.

证明 按良序集前段的定义,

$$\begin{aligned}\alpha_x &= \{t \in \alpha \mid t \in x\} \\ &= \{t \mid t \in x\} \quad (\text{因 } \alpha \text{ 是可递集, 故 } t \in x \rightarrow t \in \alpha) \\ &= x.\end{aligned}$$

证　毕

命题 2 序数的元素也是序数.

证明 设 $x \in \alpha$. 由命题 1, $x = \alpha_x \subset \alpha$. x 作为 α 的子集, 也是 $\in$ - 良序集. 因 α 是 $\in$ - 偏序的, 故有 $y \in z \in x \rightarrow y \in x$(注意 α 是可递集, 当 $y \in z \in x$ 时, 有 $y, z \in \alpha$), 这说明 x 也是可递集. x 是 $\in$ - 良序的可递集, 故 x 是序数.

证　毕

空集 ϕ 是最简单的序数, 它是所有其他序数的成员:

命题 3 $\alpha \neq \phi \rightarrow \phi \in \alpha$.

证明 设 $\alpha \neq \phi$. 则 α 有 $\in$ - 最小元 α_0. 可断言 $\alpha_0 = \phi$. 事实上, 若 $\alpha_0 \neq \phi$, 则存在 $\alpha_{00} \in \alpha_0$. α 是可递集, 故 $\alpha_{00} \in \alpha$, 这与 α_0 的最小性矛盾.

证　毕

命题 3 是说: 在所有序数之中, 空集 ϕ 是最小者.

命题 4 $\alpha \sim \beta \rightarrow \alpha = \beta$.

证明 设 $\alpha \overset{f}{\sim} \beta$. 先归纳证明 $\forall x \in \alpha\; f(x) = x$.

$x = \phi$ 时, 由 ϕ 的最小性及 f 的保序性得 $f(\phi) = \phi$.

假设 $t \in x$ 时有 $f(t) = t$，于是

$$\begin{aligned} x &= \{t \mid t \in x\} \\ &= \{f(t) \mid t \in x\} \quad (\text{由归纳假设}) \\ &= \{f(t) \mid t \in \alpha_x\} \quad (\text{由命题 1 }) \\ &= f[\alpha_x] \\ &= \beta_{f(x)} \quad (\text{由 2.1 节命题 4 ， } \alpha_x \overset{f[\alpha_x]}{\sim} \beta_{f(x)}) \\ &= f(x) \quad (\text{命题 1 }) \end{aligned}$$

最后有

$$\alpha = \{x \mid x \in \alpha\} = \{f(x) \mid x \in \alpha\} = f[\alpha] = \beta.$$

证　毕

下面的定理 1 是本节的主要结果.

定理 1　　若集的元素都是序数，则该集是 $\in$ - 良序集.

证明　设集 a 的元素都是序数，要证 a 是 $\in$ - 良序集.

(Ⅰ) $\forall \alpha \in a$，$\alpha \notin \alpha$. (若 $\alpha \in \alpha$，则由定义2 (Ⅰ)，有 $\alpha \notin \alpha$)

(Ⅱ) $\forall \alpha\ \beta\ \gamma \in a$，$\alpha \in \beta \in \gamma \to \alpha \in \gamma$. (因 γ 是可递集)

(Ⅲ) $\forall \alpha\ \beta \in a$，$\alpha$ 与 β 都是良序集. 利用良序集基本定理，以下三种情形必居其一:

$$\alpha \sim \beta; \quad \alpha \sim \beta_y = y; \quad \beta \sim \alpha_x = x.$$

由命题 4 ，它们分别相应于

$$\alpha = \beta, \quad \alpha = y \in \beta, \quad \beta = x \in \alpha.$$

(Ⅳ) 设 b 是 a 的任一非空子集. 下证 b 有 $\in$ - 最小元. 取 $\alpha \in b$. 这时有两种可能的情形:

当 $\alpha \cap b = \phi$ 时，α 就是 b 的 $\in$ - 最小元，否则有 $\alpha_0 \in b$，$\alpha_0 \in \alpha$，于是 $\alpha \cap b \neq \phi$.

当 $\alpha \cap b \neq \phi$ 时，$\alpha \cap b$ 作为 α 的非空子集，有 $\in$ - 最小元 γ_0，这个 γ_0 也是 b 的 $\in$ - 最小元. 事实上，若另有 $\gamma_{00} \in b$ 使 $\gamma_{00} \in \gamma_0$，则有 $\gamma_{00} \in \alpha$(因 α 是可递集). 这导致 $\gamma_{00} \in \alpha \cap b$，与 γ_0 的最小性矛盾.

证　毕

定理 1 指出，任何两个序数 α 与 β 之间用 $\in$ 可比大小：

$$\alpha \in \beta \lor \alpha = \beta \lor \beta \in \alpha.$$

若规定 $\alpha < \beta \leftrightarrow \alpha \in \beta$，则有

$$\alpha < \beta \lor \alpha = \beta \lor \beta < \alpha.$$

今后，常将 $\alpha \in \beta$ 写成 $\alpha < \beta$.

此外易知：

$$\alpha < \beta \leftrightarrow \alpha \subset \beta \text{ 但 } \alpha \neq \beta,$$
$$\alpha \leq \beta \leftrightarrow \alpha \subset \beta.$$

定义 3 (集的后继)

集 a 的后继，用 a' 表示，指集

$$a' = a \cup \{a\}.$$

定义毕

命题 5 (Ⅰ) 若 α 是序数，则 α 的后继 α' 也是序数. (α' 叫做 α 的后继序数)

(Ⅱ) 若集 a 的元素都是序数，则 $\cup a$ 也是序数，且是 a 的最小上界.

证明 (Ⅰ) 设 α 是序数，则 α 的元素都是序数(命题 2). 这样，α' 的元素也都是序数，因为 α' 比 α 多了一个元素 α. 由定理 1，α' 是 $\in$-良序集. 还要证明 α' 是可递集. 设 $x \in y \in \alpha' = \alpha \cup \{\alpha\}$，这时有两种可能：

当 $y = \alpha$ 时，$x \in \alpha \subset \alpha'$；

当 $y \in \alpha$ 时，因 α 是可递集，也有 $x \in \alpha \subset \alpha'$.

(Ⅱ) $\cup a$ 与 a 一样都由序数组成，由定理 1，$\cup a$ 是 $\in$-良序集. 又易知 $\cup a$ 是可递集，故 $\cup a$ 是序数. 再有

$$\alpha \in a \to \alpha \subset \cup a \to \alpha \leq \cup a,$$

这说明 $\cup a$ 是 a 的上界. 最后设 $\beta < \cup a$，即 $\beta \in \cup a$，于是

$$\exists \alpha \in a\ \beta \in \alpha \text{ 即 } \beta < \alpha,$$

这说明 β 不是 a 的上界，所以 $\cup a$ 是 a 的最小上界.

证 毕

命题 6　不同的序数有不同的后继:

$$\alpha < \beta \ \rightarrow \ \alpha' < \beta'.$$

证明　假设 $\alpha < \beta$ 且 $\beta' \leq \alpha'$, 则 $\beta \in \beta' \subset \alpha'$, 于是有 $\beta \in \alpha$ 或 $\beta = \alpha$, 与 $\alpha < \beta$ 矛盾.

证　毕

以下是一些具体的序数:

$$\begin{aligned}
&\phi, \\
&\phi' = \phi \cap \{\phi\} = \{\phi\}, \\
&\phi'' = \{\phi\}' = \{\phi\} \cap \{\{\phi\}\} = \{\phi, \{\phi\}\}, \\
&\phi''' = \{\phi, \{\phi\}\}' = \{\phi, \{\phi\}, \{\phi, \{\phi\}\}\}, \\
&\cdots\cdots
\end{aligned}$$

让我们来考察由所有序数构成的对象, 用 On 表示:

$$\mathrm{On} = \{x \mid x \text{ 是序数 }\}.$$

On 是不是集? 先假设 On 是集. On 由序数组成, 由定理 1 , On 是 $\in$ - 良序集. 根据命题 2 , On 还是可递集:

$$x \in \alpha \in \mathrm{On} \ \rightarrow \ x \in \mathrm{On}.$$

这就得出结论 —— On 也是序数: On $\in$ On ! 但 On 作为序数 On 的成员, 应具有定义 2 中的性质(I): On $\notin$ On, 矛盾.

这就是有名的 Burali - Forti 悖论. 它出现的根源在于滥用内涵公理, 把 $\{x \mid x$ 是序数 $\}$ 当作集. 上面的讨论说明 On= $\{x \mid x$ 是序数 $\}$ 这个对象不是集. 作为集, On"过大了".

后面我们将把 On 视为一种类. On 是一种特殊的可递类.

练　习　五

1. 证明不存在序数 β 使 $\alpha < \beta < \alpha'$.
2. 证明 $\cup\alpha' = \alpha$.
3. 证明 $\cup\{\alpha' \mid \alpha \in \beta\} = \beta$.
4. 设集 a 由序数组成. 证明 $\cap a$ 是序数, 且是 a 的最小元.

2.3 无限公理与自然数集

在集论内，自然数是作为特殊的序数来定义的. 如不说明，n, m, l 等字母自动代表自然数.

定义 1 (自然数)

自然数是具有如下性质的序数 α:

(I) $\alpha = \phi \lor \alpha$ 是后继序数,

(II) $\forall x \in \alpha$ ($x = \phi \lor x$ 是后继序数).

定义毕

按此定义，以下序数都是自然数:

$$\phi,\ \{\phi\},\ \{\phi,\ \{\phi\}\},\ \{\phi,\ \{\phi\},\ \{\phi,\ \{\phi\}\}\},\ \cdots$$

其中每一个是前一个的后继. 记

$0 = \phi$, (往后皆用 0 来表示空集 ϕ)

$1 = 0' = 0 \cup \{0\} = \{0\}$,

$2 = 1' = 1 \cup \{1\} = \{0,\ 1\}$,

$3 = 2' = 2 \cup \{2\} = \{0,\ 1,\ 2\}$,

......

这个过程可无止境地延续下去，一个接一个地得到无限多个自然数(这里说的无限，只是一种潜无限). 现在问: $\{x \mid x$ 是自然数$\}$ 是不是集? 已有的公理 (ZF1) -- (ZF5)不能回答这个问题. 要肯定地回答这个问题，须引人一条新公理 ——— 无限公理:

(ZF6) **无限公理**

$$\exists s\ (0 \in s \land \forall x \in s\ (x' \in s)).$$

引理 1 若集 s 是无限公理(ZF6)断言存在的，即 s 满足

$$0 \in s \land \forall x \in s\ (x' \in s),$$

则任一自然数 n 都是 s 的元素.

证明 假设存在 $n \notin s$，这时 $n \neq 0$(因 $0 \in s$). 由定义 1，n 必为后继序数. 设 $n = m' = m \cup \{m\}$，这时 $m \in n$，但 $m \notin s$ (否则 $n = m' \in s$). 于是集 $\{x \in n \mid x \notin s\} \neq 0$. 记此集的最小元为 n_0，n_0 满足

$$n_0 \in n,\ n_0 \notin s,\ n_0 \neq 0\ (\text{否则 } n_0 \in s).$$

作为自然数 n 的成员，n_0 必为后继序数(见定义1 (Ⅱ)). 设 $n_0 = m_0'$，$m_0 \notin s$(否则 $n_0 = m_0' \in s$). 又 $m_0 \in n_0 \in n$ 导致 $m_0 \in n$，m_0 的存在与 n_0 的最小性矛盾.

证　毕

任取(ZF6)所断言存在的集 s. 由引理 1，s 包含了所有自然数，故使用内涵公理可作出下面的定义:

定义 2 (自然数集 ω)

自然数集 $\omega = \{n \in s \mid n \text{ 是自然数}\}$，其中 s 是 (ZF6) 断言存在的集.

定义毕

ω 是我们遇到的第一个实无限. 有了无限公理(ZF6)，集论便进入了实无限的领域.

命题 1 ω是序数.

证明 ω 的元素都是序数. 由 2.2 节定理 1 知 ω 是 $\in$ - 良序集，故只用证 ω 是可递集，即 $x \in n \rightarrow x \in \omega$.

设 $x \in n$，下证 $x \in \omega$.

(Ⅰ) 由定义 1 (Ⅱ)知

$$x = 0 \vee x \text{ 是后继序数}.$$

(Ⅱ) 任取 $y \in x$. 因 n 是可递集，故 $y \in n$. 再由定义 1 知

$$y = 0 \vee y \text{ 是后继序数}.$$

由以上(Ⅰ)与(Ⅱ)及定义 1 知 $x \in \omega$.

证　毕

命题 2 $n \in \omega \rightarrow n' \in \omega$.

证明 (Ⅰ) n' 是后继序数.

(Ⅱ) 任取 $x \in n' = n \cup \{n\}$, 则 $x = n$ 或 $x \in n$, 于是

$$x = 0 \lor x \text{ 是后继序数}.$$

以上(Ⅰ)与(Ⅱ)说明 $n' \in \omega$.

证 毕

命题 3 $\omega = \cup\omega$.

证明

$$n \in \omega \to n \in n' \in \omega \to n \in \cup\omega,$$

$$n \in \cup\omega \to \exists m \in \omega(n \in m \in \omega) \to n \in \omega.$$

证 毕

定义 3 (极限序数)

非 0 序数若不是后继序数, 则叫做极限序数.

定义毕

命题 4 若 α 是极限序数, 则 $\beta \in \alpha \to \beta' \in \alpha$.

证明 $\alpha = \beta' \to \alpha$ 是后继序数,

$\alpha \in \beta' \to \alpha \in \beta$ 或 $\alpha = \beta$, 皆与 $\beta \in \alpha$ 矛盾.

故 $\beta \in \alpha$ 时必有 $\beta' \in \alpha$.

证 毕

命题 5 $\alpha \neq 0$ 时,

$$\alpha \text{ 是极限序数} \leftrightarrow \alpha = \cup\alpha.$$

证明 $(\to)$ 设 α 是极限序数, 下证 $\alpha = \cup\alpha$.

$x \in \alpha$ 时 $x' \in \alpha$(命题 4). 由 $x \in x' \in \alpha$ 知 $x \in \cup\alpha$.

$x \in \cup\alpha$ 时, $\exists\gamma \in \alpha\ (x \in \gamma)$. 因 α 是可递集, 故 $x \in \alpha$.

$(\leftarrow)$ 设 $\alpha = \cup\alpha$, 下证 α 不会是后继序数, 因而是极限序数. (反证)假设 $\alpha = \beta'$, 则由 $\beta' = \alpha = \cup\alpha$ 得 $\beta \in \cup\alpha$, 于是存在 $\gamma \in \alpha$ 使 $\beta \in \gamma$. $\gamma \in \alpha$ 即 $\gamma \in \beta'$, 这时 $\gamma \in \beta$ 或 $\gamma = \beta$, 但都导致 $\beta \in \beta$, 与反自反性矛盾.

证 毕

命题 6 ω 是极限序数，且是最小的极限序数.

证明 由命题 5，ω 是极限序数，这是因为 $\omega \neq 0$ 且 $\omega = \cup\omega$(命题 3). ω 的元素若不是 0，则是后继序数，故 ω 是最小的极限序数.

证 毕

现在可以写出更多的序数:

$$0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ \omega,\ \omega',\ \omega'',\ \cdots.$$

定理 1 (Peano 自然数公理)

(Ⅰ) $0 \in \omega$,

(Ⅱ) $n \in \omega \ \rightarrow\ n' \in \omega$,

(Ⅲ) $n' \neq 0$,

(Ⅳ) $m \neq n \ \rightarrow\ m' \neq n'$,

(Ⅴ) $a \subset \omega \ \rightarrow\ ((0 \in a \ \wedge\ \forall x \in a\ (x' \in a)) \ \rightarrow\ a = \omega)$.

证明 (Ⅰ)与(Ⅲ)显然. (Ⅱ) 即命题 2 .

(Ⅳ) 若 $m' = n'$ 但 $m \neq n$，则有 $m \in n \in m$，$m \in m$.

(Ⅴ) 由 $0 \in a \ \vee\ \forall x \in a\ (x' \in a)$ 及引理 1 即得 $\omega \subset a$.

证 毕

定理 1 使我们来到了古典数学的源头. 由此出发，可用集论语言来建立自然数的各种熟知的运算和性质，进而建立起实数理论.

练 习 六

1. 设 $a = \{\{2,\ 5\},\ 4,\ \{4\}\}$，计算 $\cap(\cup a - 4)$.

2. 计算 $\cap\cup(\mathcal{P}(2) - 2)$.

3. 设 $a = \{\{\{1,\ 2\},\ \{1\}\},\ \{\{1,\ 0\}\}\}$，计算 $\cup a$，$\cap a$，$\cup\cup a$，$\cap\cap a$，$\cup\cap a$ 和 $\cap\cup a$.

4. 设 $a = \{\{1,\ 2\},\ \{2,\ 0\},\ \{1,\ 3\}\}$. 计算 $\cup a$，$\cap a$，$\cup\cup a$，$\cap\cap a$，$\cup\cap a$ 和 $\cap\cup a$.

3 替换公理与基础公理

3.1 替换公理, 序型

以上引进的公理 (ZF1) — (ZF6) 大体上是由 Zermelo 于 1908 年提出的. 集论后来的发展使得公理的数目有所增加. 下面的替换公理是 Fraenkel 于 1922 年, Skolem 于 1923 年分别提出的.

(ZF7) **替换公理**

设集 a 和公式 $\varphi(x, y)$ 具有性质

$$\forall x \in a \, \exists! \, y \, \varphi(x,y), \tag{1}$$

那么便有

$$\exists s \, \forall \, x \in a \, \exists \, y \in s \; \varphi(x,y).$$

按此公理, 若 (1) 成立, 则集 a 的"影象"

$$\{y \mid \exists x \in a \; \varphi(x,y)\}$$

也是集, 是 (ZF7) 断言存在的 s 的子集. 没有 (ZF7), 则无法作出集 s 存在的断言, 无法直接用内涵公理. 应用 (ZF7), (1) 是前提. 若 (1) 成立, 即集 a 的每个成员 x 都能通过使公式 $\varphi(x,y)$ 成立的方式找到一个且只能找到一个集 y 作为"替身", 则这些"替身"构成一个集.

替换公理扩大了内涵公理 (ZF2) 的功能. 与 (ZF2) 一样, 替换公理是一种公理模式, 含有无穷条公理.

回忆 2.1 节定义 4. 良序集 a 和 b 同构, 记为 $a \sim b$, 指它们之间存在着保序双射.

下面是个重要结论, 它的证明要用到 (ZF7).

定理 1　　a 是良序集 $\to$ $\exists!\alpha\ (a \sim \alpha)$.

证明　唯一性较简单: 若同时有 α, β 使$a \sim \alpha$, $a \sim \beta$, 则有 $\alpha \sim \beta$, 这导致 $\alpha = \beta$ (2.2 节命题 4). 下证 α 的存在性.

作 $a_1 = \{x \in a \mid \exists\beta\ a_x \sim \beta\}$. 由此定义知

$$\forall x \in a_1 \exists! y\ \ (\ y \text{ 是序数} \wedge a_x \sim y).$$

应用 (ZF7) 可知

$$\exists s\ \forall x \in a_1 \exists y \in s\ (\ y \text{ 是序数} \wedge a_x \sim y).$$

任取这样的 s. 根据内涵公理, 作为 s 的子集可以定义集 b :

$$b = \{\beta \mid \exists x \in a_1 (a_x \sim \beta)\}.$$

(b 是集 a_1 的"影子".) b 由序数组成, 故 b 是 $\in$ - 良序集. 再证 b 是可递集. 设 $\gamma \in \beta \in b$. 由 b 的定义, $\exists x \in a_1 (\beta \sim a_x)$. 设 β 到 a_x 的一个保序双射是 f. 由 2.1 节命题 4 及 2.2 节命题 1 得

$$\gamma = \beta_\gamma\ \sim\ (a_x)_{f(\gamma)} = a_{f(\gamma)},$$

于是 $\gamma \in b$. 至此已知 b 是 $\in$ - 良序的可递集, 故 b 是序数.

剩下要证 $a \sim b$, 从而 b 为所求的序数 α.

根据良序集基本定理, 有 $a \sim b$, 或 $a \sim b_\beta$, 或 $b \sim a_x$. 下面说明后两种情形是不会出现的, 从而 $a \sim b$. 先假设 $a \sim b_\beta = \beta$. 因 $\beta \in b$, 故 $\exists x \in a_1$, 使 $\beta \sim a_x$. 这导致 $a \sim a_x$, 与 2.1 节命题 3 矛盾. $b \sim a_x$ 也不会出现, 否则由 b 的定义知 $b \in b$.

证　毕

定理 1 指出, 任何良序集都与一个且仅与一个序数联系在一起, 这个序数与该良序集有相同的序结构.

定义 1　　(**序型**)

设 $(a, <)$ 是良序结构. 与 a 同构的唯一的序数叫做 $(a, <)$ 的序型, 或简称为 a 的序型.

定义毕

整数集按通常的序不是良序的, 但可重新规定它的序而使之成为良序集:

$$0,\ 1,\ -1,\ 2,\ -2,\ 3,\ -3,\ \cdots$$

这时它的序型是 ω.

练 习 七

1. 设 a 是集. 证明 $\{\mathcal{P}(x) \mid x \in a\}$ 是集.

2. 在良序集 a 的后继集 $a' = a \cup \{a\}$ 中扩张 a 原有的序:

$$x \in a \text{ 时规定 } x < a, \text{ 其他次序不变.}$$

证明 a 和 a' 的序型不同.

3. 在 ω 中重新定义良序“$<_1$”, 使 $(\omega, <)$ 和 $(\omega, <_1)$ 序型不同.

3.2 类On 上的超限归纳法

在 2.2 节中我们遇见了 On 这样的对象:

$$\mathrm{On} = \{x \mid x \text{ 是序数 }\}.$$

On 由所有序数组成, 但它不是集(否则会导致 Burali-Forti 悖论). 1.2 节中我们还遇见了由所有集构成的对象, 往后把它写成

$$\mathrm{V} = \{x \mid x = x\}.$$

因 V 包含了所有集, 故被称为集宇宙. 1.2 节命题 2 曾指出 V 不是集. 若 V 是集, 则会导致 Russell 悖论. 一般来说 $\{x \mid \varphi(x)\}$ 这种对象可能不是集. On 和 V 是已见到的不是集的例子. 今后还要遇见其他这种例子.

我们把 $\{x \mid \varphi(x)\}$ 这种对象叫做类. 类可能不是集, 但也可能是集. 肯定不是集的类叫做真类. 上面的 On 和 V 都是真类. 类的成员由集组成, 但真类不能作为其他类的成员.

为了方便, 在后面的讨论中我们不回避类, 而是有条件地使用类这个概念. 真类不是 ZF 形式系统的合法对象. 每当我们使用类这个概念时, 必须符合这样一条原则: 在出现类时总能用 ZF 的

语言消去它.

今后约定: "$x \in \mathrm{On}$"即为"x 是序数"; "$x \subset \mathrm{On}$"即为"x 由序数组成". 对于类 $A = \{x \mid \varphi(x)\}$, "$x \in A$"即为 $\varphi(x)$ 的另一种写法.

设 A, B 都是类. $A = B$, $A \subset B$, $x \in A \cap B$ 等等写法都是可消去的:

$$A = B \leftrightarrow \forall x\,(x \in A \leftrightarrow x \in B),$$
$$A \subset B \leftrightarrow \forall x\,(x \in A \rightarrow x \in B),$$
$$x \in A \cap B \leftrightarrow x \in A \land x \in B,$$

以上各式右端出现的 $x \in A$, $x \in B$ 都可用 A, B 各自对应的公式消去.

在"可消去"的原则之下, 今后将类和集同样对待.

一个类 A 叫做可递类, 如果满足

$$y \in x \in A \rightarrow y \in A, \text{ 或 } x \in A \rightarrow x \subset A.$$

On 与 V 都是可递类的例子.

2.1 节中我们建立了良序集上的超限归纳法, 可用这种归纳法证明形为 $\forall x \in a\ \varphi(x)$ 的命题(2.1 节定理 1), 其中 a 是某个良序集. a 为序数, 则是一种特殊情形. 平常用的归纳法是 $a = \omega$ 时的特殊情形.

下面将良序集上的超限归纳法推广到类 On 上.

定理 1 (类 On 的最小元原理)

类 On 的非空子类必有最小元.

证明 设 $B \subset On$ 且 $B \neq 0$, 取 $\alpha \in B$. 若 $\alpha \cap B = 0$, 则 α 就是 B 的最小元. 现设 $\alpha \cap B \neq 0$. $\alpha \cap B$ 作为序数 α 的非空子集有最小元 α_0. 此时 α_0 就是 B 的最小元. 事实上, 若 B 中另有 $\alpha_{00} \in \alpha_0$, 则 $\alpha_{00} \in \alpha$, $\alpha_{00} \in \alpha \cap B$, 这与 α_0 在 $\alpha \cap B$ 中最小性矛盾.

证 毕

定理 2 (类 On 上的超限归纳证明)

$$\forall \alpha \in \mathrm{On}(\forall \beta < \alpha\ \varphi(\beta) \rightarrow \varphi(\alpha)) \rightarrow \forall \alpha \in \mathrm{On}\varphi(\alpha).$$

证明 作

$$B = \{\beta \mid \varphi(\beta) \text{不成立}\}.$$

只用证 $B = 0$. 假设 $B \neq 0$, 由定理 1 知 B 有最小元 α_0. 由 B 的定义, $\varphi(\alpha_0)$ 不成立. 由 α_0 的最小性知当 $\beta < \alpha_0$ 时 $\varphi(\beta)$ 皆成立, 由此又得 $\varphi(\alpha_0)$ 成立, 矛盾.

证 毕

下面将函数的概念推广到类.

设类 A, B 和公式 $F(x, y)$ 具有性质

$$\forall x \in A\ \exists! y \in B\ F(x, y),$$

则说由公式 $F(x, y)$ 确定了 A 到 B 的一个函数 $F: A \longrightarrow B$, 并约定

$$y = F(x) \leftrightarrow F(x, y).$$

A 为 F 的定义域, $F[A](\subset B)$ 表示 F 的值域. 若 A 是集, 则由替换公理 (ZF7) 即知 $F[A]$ 也是集.

例如, 公式

$$\forall \alpha\ \exists!\ \beta(\beta = \alpha').$$

确定了我们熟悉的函数

$$S: \mathrm{On} \longrightarrow \mathrm{On},\ S(\alpha) = \alpha'.$$

S 的定义域为 On, 值域为 $\mathrm{On} - \{0\}$.

设 $C \subset A$. $F: A \longrightarrow B$ 在 C 上的限制仍记为 $F\lceil C$, 一般情形下它是类

$$F\lceil C = \{(x, y) \in C \times B \mid y = F(x)\}.$$

需要记住一点: 当 C 是集时, $F\lceil C$ 也是集. 事实上, 这时可用替换公理, 由 C 是集知 $F[C]$ 也是集, 而 $F\lceil C \subset C \times F[C]$.

推广的类函数其定义域最大可以是集宇宙 V. 这种类函数也叫做集运算. 具体说, 若公式 $G(x, y)$ 具有性质

$$\forall x\ \exists! y\ G(x, y),$$

则存在集宇宙函数 $G: \mathrm{V} \longrightarrow \mathrm{V}$. 这时 $y = G(x)$ 表示 $G(x, y)$ 成

立.

集运算 $G: \mathrm{V} \longrightarrow \mathrm{V}$ 的例子如求并，求交，求幂集，求后继等等.

集论中强有力的工具之一是超限归纳定义. 超限归纳证明和超限归纳定义统称为超限归纳法.

我们常常希望在类 On 上定义函数 F，使得对每一个序数 α，$F(\alpha)$ 的值依赖于 F 对 $\beta < \alpha$ 的取值，也就是使 $F(\alpha)$ 依赖于 $F\lceil\alpha$. 为进行这种类 On 上的超限归纳定义，需要有一个集运算 $G: \mathrm{V} \longrightarrow \mathrm{V}$，用它来规定 $F(\alpha)$ 对 $F\lceil\alpha$ 的依赖方式.

作为第一步，先考察把 On 换成某个序数 δ 的情形，讨论序数 δ 上的归纳定义.

引理 1 （唯一性引理）

设函数 $H: \delta \longrightarrow \mathrm{V}$，$\widetilde{H}: \gamma \longrightarrow \mathrm{V}$ $(\delta \leq \gamma)$ 和集运算 $G: \mathrm{V} \longrightarrow \mathrm{V}$ 满足

$$\forall\alpha < \delta\ H(\alpha) = G(H\lceil\alpha) \text{ 且 } \widetilde{H}(\alpha) = G(\widetilde{H}\lceil\alpha), \tag{1}$$

则当 $\alpha < \delta$ 时 $\widetilde{H}(\alpha) = H(\alpha)$，即 $\widetilde{H}\lceil\delta = H$.

证明 对 $\alpha < \delta$ 归纳(2 .1 节定理 1 中取 a 为 δ).

$\alpha = 0$ 时，

$$H(0) = G(H\lceil 0) = G(0) = G(\widetilde{H}\lceil 0) = \widetilde{H}(0).$$

归纳假设：$\beta < \alpha$ 时 $\widetilde{H}(\beta) = H(\beta)$，即 $\widetilde{H}\lceil\alpha = H\lceil\alpha$.

由归纳假设及条件 (1) 便得

$$\widetilde{H}(\alpha) = G(\widetilde{H}\lceil\alpha) = G(H\lceil\alpha) = H(\alpha).$$

证 毕

定理 3 （序数 δ 上的超限归纳定义）

给定集运算 $G: \mathrm{V} \longrightarrow \mathrm{V}$，则唯一存在序数 δ 上的函数 $F_\delta: \delta \longrightarrow \mathrm{V}$ 满足

$$\forall\alpha < \delta, \quad F_\delta(\alpha) = G(F_\delta\lceil\alpha). \tag{2}$$

证明 F_δ 的唯一性由引理 1 即得.

现对 $\delta \in \mathrm{On}$ 归纳证明 F_δ 的存在性.

$\delta = 0$ 时取 $F_\delta = 0$. $\delta > 0$ 时, δ 或为后继序数, 或为极限序数.

归纳假设: 对每个 $\gamma < \delta$, 存在 F_γ 满足

$$F_\gamma(\alpha) = G(F_\gamma\lceil\alpha), \quad \alpha < \gamma. \tag{3}$$

当 δ 为后继序数时, 设 $\delta = \gamma'$, 这时由归纳假设, 已有满足 (3) 式的 F_γ 在手. 利用 F_γ 可规定 $F_\delta: \delta \longrightarrow \mathrm{V}$ 如下:

$$\forall\alpha < \delta, \quad F_\delta(\alpha) = G(F_\gamma\lceil\alpha). \tag{4}$$

现需证明 F_δ 具有性质 (2). 注意 $\delta = \gamma'$, 有

$$\alpha < \delta \ \leftrightarrow \ \alpha < \gamma \ \vee \ \alpha = \gamma,$$

故当 $\beta < \alpha$ 时, 有 $\beta < \delta$ 且 $\beta < \gamma$, 所以

$$\begin{aligned} F_\gamma(\beta) &= G(F_\gamma\lceil\beta) && \text{((3)式对 } F_\gamma \text{ 成立)} \\ &= F_\delta(\beta). && \text{(由 } F_\delta \text{ 的定义式 (4))} \end{aligned}$$

这说明 $F_\gamma\lceil\alpha = F_\delta\lceil\alpha$, 代入 (4) 式便得所需的 (2) 式.

当 δ 为极限序数时, 规定 $F_\delta: \delta \longrightarrow \mathrm{V}$ 如下: 对任意 $\alpha < \delta$ (此时 $\alpha' < \delta$, 见 2.3 节命题 4), 令

$$F_\delta(\alpha) = F_{\alpha'}(\alpha).$$

于是当 $\beta < \alpha$ 时,

$$F_\delta(\beta) = F_{\beta'}(\beta) = F_{\alpha'}(\beta).$$

后面的等式用了唯一性引理(由归纳假设, $F_{\beta'}$ 与 $F_{\alpha'}$ 都具有性质 (3), 故满足引理 1 中的条件 (1)). 所得结果说明 $F_\delta\lceil\alpha = F_{\alpha'}\lceil\alpha$. 最后,

$$\begin{aligned} F_\delta(\alpha) &= F_{\alpha'}(\alpha) && \text{(规定)} \\ &= G(F_{\alpha'}\lceil\alpha) && \text{(由归纳假设)} \\ &= G(F_\delta\lceil\alpha). \end{aligned}$$

F_δ 满足了 (2) 式.

证 毕

例 1 设已知集运算 $G : \mathrm{V} \longrightarrow \mathrm{V}$

$$G(x) = \begin{cases} n & x = 0 \\ (x(m))' & x \text{ 是以 } m' \text{ 为定义域的函数, } m \in \omega \\ 0 & x \text{ 为其他集} \end{cases} \tag{5}$$

其中 $n \in \omega$. 按定理 3，若取 $\delta = \omega$, 则唯一存在函数 $F : \omega \longrightarrow \mathrm{V}$ 满足

$$\forall k \in \omega, \quad F(k) = G(F\lceil k). \tag{6}$$

记

$$F(k) = n + k, \tag{7}$$

于是有

$$\begin{aligned} n + 0 &= F(0) \quad (\text{由 } (7)) \\ &= G(0) \quad (\text{由 } (6)) \\ &= n, \quad ((5) \text{ 中 } x = 0 \text{ 的情形}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n + m' &= F(m') \quad (\text{由 } (7)) \\ &= G(F\lceil m') \quad (\text{由 } (6)) \\ &= (F(m))', \quad ((5) \text{ 中第二种情形}) \\ &= (n + m)'. \quad (\text{由 } (7)) \end{aligned}$$

这就是自然数加法的定义，其合理性是定理 3 肯定的.

定理 4 （类 On 上的超限归纳定义）

给定集运算 $G : \mathrm{V} \longrightarrow \mathrm{V}$, 则唯一存在类 On 上函数 $F : \mathrm{On} \longrightarrow \mathrm{V}$ 满足

$$F(\alpha) = G(F\lceil \alpha), \quad \alpha \in \mathrm{On} \tag{8}$$

证明 F 的唯一性: 设 F 和 $\widetilde{F}$ 都具有性质 (8), 则对 $\alpha \in \mathrm{On}$ 归纳易证 $\forall \alpha \in \mathrm{On}\ F(\alpha) = \widetilde{F}(\alpha)$.

F 的存在性:

根据定理 3，对于每个 $\alpha \in \mathrm{On}$ 都唯一存在 $F_{\alpha'} : \alpha' \longrightarrow \mathrm{V}$ 满足

$$F_{\alpha'}(\gamma) = G(F_{\alpha'}\lceil\gamma), \quad \gamma \in \alpha'. \tag{9}$$

现定义 $F: \mathrm{On} \longrightarrow \mathrm{V}$ 如下

$$F(\alpha) = F_{\alpha'}(\alpha). \tag{10}$$

于是有

$$\begin{aligned} F(\alpha) &= G(F_{\alpha'}\lceil\alpha) \quad (\text{由 } (9),\ (10)) \\ &= G(F\lceil\alpha). \end{aligned}$$

最后一步用了结论 $F\lceil\alpha = F_{\alpha'}\lceil\alpha$，此式成立是因为当 $\beta < \alpha$ 时，

$$\begin{aligned} F(\beta) &= F_{\beta'}(\beta) \quad (\text{由 } (10)) \\ &= F_{\alpha'}(\beta) \quad (\text{由引理 } 1\,) \end{aligned}$$

这就证明了由 (10) 定义的 F 具有性质 (8).

证　毕

练　习　八

1．利用定理 3 证明满足以下性质的函数 $f: \omega \longrightarrow \omega$ 的存在性：$f(0) = c$，$f(n+1) = h(n, f(n))$，其中 $c \in \omega$，h 是已知函数 $h: \omega^2 \longrightarrow \omega$.

2．利用定理 3 证明满足以下性质的函数 $f: \omega \longrightarrow \omega$ 的存在性：

$$\begin{aligned} &f(0) = 1,\ f(1) = 2, \\ &f(n+2) = f(n) + f(n+1). \end{aligned}$$

（f 叫做 Fibonacci 序列）

3.3　序数的运算

现将自然数的运算推广到一般序数.

序数的加法是对 $\beta \in \mathrm{On}$ 归纳定义的：

$\alpha + 0 = \alpha$；

$\alpha + \beta' = (\alpha + \beta)'$；

$\alpha + \beta = \cup\{\alpha + \gamma \mid \gamma < \beta\}$，当 β 为极限序数时.

定义中的 α 被视为固定参数. 若 $\alpha, \beta \in \omega$，前两式与自然数加法一致.

上述定义的合理性是 3.2 节定理 4 肯定的，应用该定理所需要的集运算是 $G : \mathrm{V} \longrightarrow \mathrm{V}$，

$$G(x) = \begin{cases} \alpha & x = 0 \\ (x(\beta))' & x \text{ 是以后继序数 } \beta' \text{ 为定义域的函数} \\ \cup\{x(\gamma) \mid \gamma < \beta\} & x \text{是以极限序数} \beta \text{ 为定义域的函数} \\ 0 & x \text{ 是其他集} \end{cases} \tag{1}$$

由 3.2 节定理 4 可断言唯一存在函数 $F : \mathrm{On} \longrightarrow \mathrm{V}$ 满足

$$F(\beta) = G(F\lceil\beta). \tag{2}$$

记 $\alpha + \beta = F(\beta)$，于是有

$$\begin{aligned} \alpha + 0 &= F(0) = G(0) \qquad (\text{由 } (2)) \\ &= \alpha, \qquad ((1) \text{ 中 } x = 0 \text{ 的情形}) \\ \alpha + \beta' &= F(\beta') = G(F\lceil\beta') \qquad (\text{由 } (2)) \\ &= (F(\beta))' \qquad ((1) \text{ 中第二种情形}) \\ &= (\alpha + \beta)'. \end{aligned}$$

当 β 为极限序数时，

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= F(\beta) = G(F\lceil\beta) \qquad (\text{由 } (2)) \\ &= \cup\{F(\gamma) \mid \gamma < \beta\} \qquad ((1) \text{ 中第三种情形}) \\ &= \cup\{\alpha + \gamma \mid \gamma < \beta\}. \end{aligned}$$

有了加法运算，后继序数 α' 可写成 $\alpha + 1$：

$$\alpha + 1 = \alpha + 0' = (\alpha + 0)' = \alpha'.$$

与加法类似，序数的乘法可定义如下：

$\alpha \cdot 0 = 0$,

$\alpha \cdot \beta' = \alpha \cdot \beta + \alpha$,

$$\alpha \cdot \beta = \cup\{\alpha \cdot \gamma \mid \gamma < \beta\}\text{，当 }\beta\text{ 是极限序数时.}$$

序数的指数运算可定义如下:

$$\alpha^0 = 1,$$
$$\alpha^{\beta+1} = \alpha^{\beta} \cdot \alpha,$$
$$\alpha^{\beta} = \cup\{\alpha^{\gamma} \mid \gamma < \beta\}\text{，当 }\beta\text{ 是极限序数时.}$$

序数的加法和乘法满足结合律，但不满足交换律，例如，

$$\omega + 1 = \omega',$$
$$1 + \omega = \cup\{1 + n \mid n \in \omega\} = \omega \neq \omega + 1;$$
$$\omega \cdot 2 = \omega \cdot 1 + \omega = \omega + \omega = \cup\{\omega + n \mid n \in \omega\},$$
$$2 \cdot \omega = \cup\{2 \cdot n \mid n \in \omega\} = \omega \neq \omega \cdot 2.$$

(注意 $\omega \in \omega' = \omega + 1$，故 $\omega \in \omega \cdot 2$)

由定义，$2^{\omega} = \cup\{2^n \mid n \in \omega\} = \omega$. 这与下一章中定义的基数的指数运算不同. 序数的指数运算与基数指数算是两个不同的概念.

序数由小到大的排列是:

$$0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n,\ \cdots,\ \omega,\ \omega+1,\ \cdots,\ \omega+n,\ \cdots,$$
$$\omega\cdot 2,\ \cdots,\ \omega\cdot n,\ \cdots,\ \omega^2,\ \cdots,\ \omega^n,\ \cdots,\ \omega^{\omega},\ \cdots$$

这就是序数宇宙 On . 它是由空集 0 出发反复使用后继运算与并集运算等方式形成.

练 习 九

1. 证明: $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$.

2. 证明: $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$.

3. 证明: $\alpha + \beta =$ 良序结构 $((\alpha \times \{0\}) \cup (\beta \times \{1\}), <)$ 的序型，其中 $<$ 满足:

$$(x,0) < (y,1),\quad \text{若 } x \in \alpha,\ y \in \beta;$$
$$(x,0) < (y,0),\quad \text{若 } x \in y \in \alpha\ ;$$
$$(x,1) < (y,1),\quad \text{若 } x \in y \in \beta\ .$$

4. 证明 $\alpha \cdot \beta =$ 良序结构 $(\beta \times \alpha, <)$ 的序型. 其中 $<$ 规定为:

$$(x, y) < (x_1, y_1), \quad 若 x \in x_1 \in \beta;$$
$$(x, y) < (x, y_1), \quad 若 y \in y_1 \in \alpha.$$

3.4 良基集

本节讨论一个新的集类, 生成过程与 On 类似, 不同的是将后继运算换成了幂集运算: 仅仅由空集出发反复使用幂集运算和并集运算形成一种新集类. 这种集类为通常数学提供了足够多的集.

以下条件归纳定义了函数 $v : \mathrm{On} \longrightarrow \mathrm{V}$,

$$v(0) = 0,$$
$$v(\alpha + 1) = \mathcal{P}(v(\alpha)),$$
$$v(\alpha) = \cup\{v(\gamma) \mid \gamma < \alpha\}, \quad 若 \gamma 是极限序数.$$

为书写方便, 用 v_α 表示 $v(\alpha)$, 并给出如下定义.

定义 1 (良基集)

集 v_α 的元素叫做良基集, 其中 v_α 满足:

$$\mathrm{v}_0 = 0,$$
$$\mathrm{v}_{\alpha+1} = \mathcal{P}(\mathrm{v}_\alpha),$$
$$\mathrm{v}_\alpha = \cup_{\gamma<\alpha}\mathrm{v}_\gamma, \quad 若 \alpha 是极限序数.$$

所有良基集构成的类记作

$$\mathrm{WF} = \cup_{\alpha\in\mathrm{On}}\mathrm{v}_\alpha.$$

定义毕

x 是良基集可表示为 $x \in \mathrm{WF}$, 即 $\exists\alpha(x \in \mathrm{v}_\alpha)$.

可依次写出 WF 的前几个层次:

$$\mathrm{v}_0 = 0,$$
$$\mathrm{v}_1 = \mathcal{P}(\mathrm{v}_0) = \{0\} = 1,$$
$$\mathrm{v}_2 = \mathcal{P}(\mathrm{v}_1) = \{0,\ 1\} = 2,$$

$$v_3 = \mathcal{P}(v_2) = \{0, 1, \{1\}, 2\},$$

$\cdots\cdots$

从 v_3 开始，成员中便出现了非序数集. v_3 中的 $\{1\}$ 就不是序数. 上面的每一步得到的都只有有限个成员. 上述过程的终结，产生了一个新的层次 v_ω：

$$v_\omega = \cup_{n\in\omega} v_n.$$

新的过程一个接一个地持续下去：

$$v_{\omega+1} = \mathcal{P}(v_\omega), \cdots, v_{\omega+n}, \cdots, v_{\omega\cdot 2}, \cdots,$$

$$v_{\omega\cdot n}, \cdots, v_{\omega^2}, \cdots, v_{\omega^n}, \cdots, v_{\omega^\omega}, \cdots$$

命题 1 (Ⅰ) **每个 v_α 是 $\in$ - 可递集,**

(Ⅱ) $v_\alpha \notin v_\alpha$,

(Ⅲ) $\gamma < \alpha \rightarrow v_\gamma \subset v_\alpha$ 但 $v_\gamma \neq v_\alpha$. (严格递增性)

证明 对 α 归纳.

$\alpha = 0$ 是平凡情形.

$\alpha = \beta + 1$ 时, $v_\alpha = \mathcal{P}(v_\beta)$,

(Ⅰ) $x \in y \in v_\alpha \rightarrow x \in y \subset v_\beta$

$\rightarrow x \in v_\beta$

$\rightarrow x \subset v_\beta$ (用了归纳假设: v_β 是可递集)

$\rightarrow x \in \mathcal{P}(v_\beta) = v_\alpha$.

(Ⅱ) (反证)设 $v_\alpha \in v_\alpha$，则 $v_\alpha \subset v_\beta$; 但 $v_\beta \in \mathcal{P}(v_\beta) = v_\alpha$, 由 (Ⅰ) 知 $v_\beta \subset v_\alpha$. 合起来有 $v_\alpha = v_\beta$, $v_\beta \in v_\beta$, 这与归纳假设矛盾.

(Ⅲ) $\gamma < \alpha \rightarrow \gamma \leq \beta$

$\rightarrow v_\gamma \subset v_\beta$ (用了归纳假设)

$\rightarrow v_\gamma \in \mathcal{P}(v_\beta) = v_\alpha$

$\rightarrow v_\gamma \subset v_\alpha$ 但 $v_\gamma \neq v_\alpha$.

(已证 v_α 是可递集且 $v_\alpha \notin v_\alpha$)

α 为极限序数时,

$$v_\alpha = \cup\{v_\gamma \mid \gamma \in \alpha\}$$ 且

$\gamma \in \alpha \rightarrow \gamma+1 \in \alpha$. (2.3 节命题 4)

(Ⅰ) $x \in y \in v_\alpha \rightarrow \exists \gamma \in \alpha \quad x \in y \in v_\gamma$

$\rightarrow x \in v_\gamma$ (由归纳假设, v_γ 为可递集)

$\rightarrow x \in v_\alpha$.

(Ⅱ) (反证) 设 $v_\alpha \in v_\alpha$, 则 $\exists \gamma \in \alpha$ 使 $v_\alpha \in v_\gamma$. 因 $v_\gamma \in v_{\gamma+1} \subset v_\alpha$, 故又有 $v_\gamma \in v_\alpha$, 而 v_γ 为可递集, 便得 $v_\gamma \in v_\gamma$, 与归纳假设矛盾.

(Ⅲ) $\gamma < \alpha$ 时, 由归纳假设, $v_\gamma \subset v_{\gamma+1}$ 但 $v_\gamma \neq v_{\gamma+1}$, 由此即得 $v_\gamma \subset v_\alpha$ 但 $v_\gamma \neq v_\alpha$.

证 毕

由命题 1 , 我们有

$$v_0 \subset v_1 \subset v_2 \subset \cdots$$

一个良基集一旦在 WF 中的某一层次出现, 便在后面的所有层次都出现. 对任给的良基集 x, $x \in v_\alpha$ 的最小 α 一定是个后继序数: $\alpha = \beta + 1$. 事实上, α 不会是 0 (因 $v_0 = 0$); 也不会是极限序数, 否则由定义 1 知有更小的 $\gamma < \alpha$ 使 $x \in v_\gamma$. 良基集第一次出现的层次相应于后继序数下标, 这一特点使我们可以用下面的方式让每一个良基集都联系着一个序数 —— 秩.

定义 2 (良基集的秩)

设 $x \in$ WF. x 的秩, 用 rank(x) 表示, 定义为

$$\text{rank}\,(x) = \text{使 } x \in v_{\beta+1} \text{ 的最小序数 } \beta.$$

定义毕

由定义 2 即知, 若 $\beta = \text{rank}\,(x)$, 则有

$$x \in v_{\beta+1} \text{ 但 } x \notin v_\beta, \tag{1}$$

$$\forall \alpha > \beta \quad x \in v_\alpha. \quad \text{(由命题 1 (Ⅲ) 及 } \alpha \geq \beta+1) \tag{2}$$

也就是说, rank (x) 是 $x \notin v_\beta$ 的最大 β; x 在 WF 中 $v_{\beta+1}$ 这一层次开始出现.

命题 2 v_α 是由所有秩比 α 小的良基集组成:

$$v_\alpha = \{x \in \text{WF} \mid \text{rank}\,(x) < \alpha\}.$$

证明 先设 $\beta = \text{rank}(x) < \alpha$，由 (2) 即知 $x \in \mathrm{v}_\alpha$.

再设 $x \in \mathrm{v}_\alpha$，这时 $\beta = \text{rank}(x) < \alpha$. 事实上，若 $\beta \geq \alpha$，则由命题 1 (Ⅲ) 得 $x \in \mathrm{v}_\beta$，与 (1) 矛盾.

证 毕

命题 3 $\alpha \in \mathrm{v}_{\alpha+1} - \mathrm{v}_\alpha$，故 $\text{rank}(\alpha) = \alpha$.

证明 先证 $\alpha \in \mathrm{v}_{\alpha+1}$，即 $\alpha \subset \mathrm{v}_\alpha$，即 $\beta < \alpha \rightarrow \beta \in \mathrm{v}_\alpha$.

对 α 归纳. $\alpha = 0$ 时，$0 \subset \mathrm{v}_0$，$0 \in \mathrm{v}_1$.

假设 $\beta < \alpha$ 时，$\beta \in \mathrm{v}_{\beta+1}$. 因 $\beta + 1 \leq \alpha$，由命题 1 (Ⅲ)，$\mathrm{v}_{\beta+1} \subset \mathrm{v}_\alpha$，所以 $\beta \in \mathrm{v}_\alpha$. 这就证明了 $\alpha \subset \mathrm{v}_\alpha$，$\alpha \in \mathrm{v}_{\alpha+1}$.

下证 $\alpha \notin \mathrm{v}_\alpha$.

$\alpha = 0$ 时，$0 \notin \mathrm{v}_0$，因 $\mathrm{v}_0 = 0$.

$\alpha = \beta + 1$ 时，若有 $\alpha \in \mathrm{v}_\alpha$，即 $\beta + 1 \in \mathrm{v}_{\beta+1} = \mathcal{P}(\mathrm{v}_\beta)$，则有 $\beta + 1 \subset \mathrm{v}_\beta$，于是 $\beta \in \mathrm{v}_\beta$，与归纳假设矛盾.

α 为极限序数时，若有 $\alpha \in \mathrm{v}_\alpha = \bigcup\{\mathrm{v}_\gamma \mid \gamma < \alpha\}$，则有 $\gamma < \alpha$ 使 $\alpha \in \mathrm{v}_\gamma$. 由 v_γ 的可递性知 $\gamma \in \mathrm{v}_\gamma$，也与归纳假设矛盾.

证 毕

由命题 3 知所有序数都是良基集:

$$\text{On} \subset \text{WF}.$$

命题 4 (Ⅰ) $x \in \text{WF} \leftrightarrow x \subset \text{WF}$,

(Ⅱ) $y \in x \rightarrow \text{rank}(y) < \text{rank}(x)$.

证明 先证明 (Ⅰ) 的一半: $x \in \text{WF} \rightarrow x \subset \text{WF}$，并同时证明 (Ⅱ).

设 $y \in x \in \text{WF}$. 记 $\text{rank}(x) = \alpha$. 我们有:

$$x \in \mathrm{v}_{\alpha+1} = \mathcal{P}(\mathrm{v}_\alpha),\ x \subset \mathrm{v}_\alpha,\ y \in \mathrm{v}_\alpha,\ y \in \text{WF}.$$

由命题 2 即得 $\text{rank}(y) < \alpha = \text{rank}(x)$.

再证 (Ⅰ) 的另一半: $x \subset \text{WF} \rightarrow x \in \text{WF}$.

当 $y \in x \subset \text{WF}$ 时，$y \in \text{WF}$，故 $\text{rank}(y)$ 有意义. 令

$$\alpha = \bigcup\{\text{rank}(y) + 1 \mid y \in x\},$$

则有

$$
\begin{aligned}
y \in x &\rightarrow \operatorname{rank}(y)+1 \subset \alpha \qquad (\alpha \text{ 的定义式}) \\
&\rightarrow \operatorname{rank}(y) < \alpha \\
&\rightarrow y \in V_\alpha \qquad (\text{命题 } 2)
\end{aligned}
$$

这说明 $x \subset V_\alpha$，$x \in V_{\alpha+1}$；$x \in \mathrm{WF}$.

证 毕

命题 4 说明：由良基集构成的集仍是良基集；良基集的元素仍是良基集(即良基集类 WF 是可递类)；良基集的成员是具有较小秩的良基集. 对任意良基集 x 都不会出现 $x \in x$ 这种情形(否则 rank $(x) <$ rank (x)). 我们看到，$\in$ - 反自反性不仅是序数具有的性质，也是所有良基集具有的性质.

在第 2.1 节定义 3 中，我们已提到过"良基性"的概念. 集 a 上二元关系 r 具有良基性，是指 a 的任一非空子集都有 r - 极小元.

下面的命题指出了良基集与"良基性"这两个概念之间的关系.

命题 5 设 a 是良基集，则"$\in$"是 a 上的良基关系，即：良基集的任一非空子集定有 $\in$ - 极小元.

证明 设 b 是 a 的非空子集. 因非空集 $\{\operatorname{rank}(x) \mid x \in b\}$ 由序数组成，故必有最小成员(2.2 节定理 1)，记为 $\alpha = \operatorname{rank}(x_0)$，$x_0 \in b$. 由命题 4 (Ⅱ) 知 x_0 是 b 的 $\in$ - 极小元.

证 毕

下面命题的结论可看成是 rank(x) 的归纳定义式.

命题 6 $\operatorname{rank}(x) = \cup\{\operatorname{rank}(y)+1 \mid y \in x\}$.

证明 记 $\alpha = \cup\{\operatorname{rank}(y)+1 \mid y \in x\}$. 要证 $\operatorname{rank}(x) = \alpha$.

先设 $\beta \in \alpha$，故存在 $y \in x$ 使 $\beta \in \operatorname{rank}(y)+1$. 于是有

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{rank}(y) < \operatorname{rank}(x), \\
&\operatorname{rank}(y)+1 \leq \operatorname{rank}(x), \\
&\operatorname{rank}(y)+1 \subset \operatorname{rank}(x), \\
&\quad \beta \in \operatorname{rank}(x).
\end{aligned}
$$

下证 $\operatorname{rank}(x) \subset \alpha$，即 $\operatorname{rank}(x) \leq \alpha$，这只用证 $x \in V_{\alpha+1}$

便可. 为此, 只用证 $x \subset \mathrm{v}_\alpha$. 设 $y \in x$. 于是有 rank $(y) \in \alpha$ (注意 α 的定义式及 rank $(y) \in$ rank $(y)+1$), 再由命题 2 得 $y \in \mathrm{v}_\alpha$.

证 毕

练 习 十

1. 证明: 若 $(y,z) \in x \in \mathrm{WF}$, 则
   rank $(y) <$ rank (x), rank $(z) <$ rank (x).
2. 证明: $\mathrm{v}_\alpha \cap \mathrm{On} = \alpha$.
3. 设 rank $(x) = \alpha$. 证明:
   (Ⅰ) $\mathcal{P}(x) \in \mathrm{v}_{\alpha+2}$;
   (Ⅱ) $x \times x \in \mathrm{v}_{\alpha+3}$.
4. 若 a 是可递集且"$\in$"是 a 上的良基关系, 则 $a \subset \mathrm{WF}$.

3.5 基础公理

上面讨论的良基集类 WF 是很大的集类, 它除了含有所有序数, 还包含了标准的数学构造所需要的集, 且对各种通常的集论运算都具有封闭性.

命题 1 (Ⅰ) 若 $x \in \mathrm{WF}$, 则 $\cup x$, $\mathcal{P}(x) \in \mathrm{WF}$, 且它们的秩小于 rank $(x)+\omega$.

(Ⅱ) 若 x, $y \in \mathrm{WF}$, 则 $x \times y$, $x \cup y$, $x \cap y$, $\{x, y\}$, (x, y) 及 ${}^y x$ 皆为良基集, 且它们的秩小于

$$\max(\text{rank }(x), \text{ rank }(y)) + \omega.$$

证明 (Ⅰ) 设 rank $(x) = \alpha$, 则有 $x \in \mathrm{v}_{\alpha+1}$, $x \subset \mathrm{v}_\alpha$. 此

时

$$\begin{aligned} z \in \cup x &\to \exists y \in x\ z \in y \in x \\ &\to z \in y \in \mathrm{v}_\alpha \\ &\to z \in \mathrm{v}_\alpha. \quad (\mathrm{v}_\alpha \text{ 是可递集}) \end{aligned}$$

这说明 $\cup x \subset \mathrm{v}_\alpha$，$\cup x \in \mathrm{v}_{\alpha+1}$，$\mathrm{rank}\ (\cup x) \le \alpha < \alpha + \omega$.

因 $x \subset \mathrm{v}_\alpha$，故 $\mathcal{P}(x) \in \mathrm{v}_{\alpha+2}$. 这说明

$$\mathrm{rank}\ (\mathcal{P}(x)) \le \alpha + 1 < \alpha + \omega.$$

(II) 设 $\alpha = \max(\mathrm{rank}(x),\ \mathrm{rank}(y))$，则有 $x, y \subset \mathrm{v}_\alpha$，$x, y \in \mathrm{v}_{\alpha+1}$. 这时 $\{x, y\} \in \mathrm{v}_{\alpha+2}$，故 $\mathrm{rank}(\{x, y\}) < \alpha + 2$;

$$(x, y) = \{\{x\},\ \{x, y\}\} \subset \mathrm{v}_{\alpha+2},\ (x, y) \in \mathrm{v}_{\alpha+3}.$$

故 $\mathrm{rank}\ ((x, y)) < \alpha + 3$; $x \cup y$, $x \cap y \in \mathrm{v}_{\alpha+1}$，故它们的秩小于 $\alpha + 1$;

$$x \times y = \{(s, t) \mid s \in x, t \in y\},$$

$(s, t) \in \mathrm{v}_{\alpha+2}$，$x \times y \in \mathrm{v}_{\alpha+3}$，故 $\mathrm{rank}\ (x \times y) < \alpha + 3$;

$${}^y x = \{f \mid f:\ y \longrightarrow x\},\ f \subset y \times x \subset \mathrm{v}_{\alpha+2},\ {}^y x \in \mathrm{v}_{\alpha+4},$$

故 $\mathrm{rank}({}^y x) < \alpha + 4$.

总之，以上各集的秩 $< \alpha + \omega$.

证 毕

在分析数学中，有理数、实数和复数都是由自然数集出发利用集运算逐步构造的. 分析数学以及数学的其他分支在集论的框架内并没有走得很远. 良基集类 WF 为通常数学提供了足够大的活动舞台. 事实上, 通常数学的活动范围只占据了这个舞台的很小一部分.

那么，除了良基集我们还需要什么别的集呢?

下面的基础公理是 ZF 系统的最后一条公理.

(ZF8) **基础公理**

所有集都是良基集: $V = WF$.

至此，我们完成了 ZF 系统的建立. 以后把不包括基础公理的

ZF 记作 ZF^- .

(ZF8) 有另一种等价的形式:

命题 2 $V = WF \rightarrow$ **任何非空集都有 $\in$ - 极小元.**

证明 $(\rightarrow)$ 由 3.4 节命题 5 即得.

$(\leftarrow)$ 下面反复要用 3.4 节命题 4 (Ⅰ): $x \in WF \leftrightarrow x \subset WF$.

假设任何非空集都有 $\in$ - 极小元. 任取集 a . 要证 $a \in WF$, 或 $a \subset WF$. 先归纳定义 $\cup^n a$ 如下:

$$\cup^0 a = a,\ \cup^{n+1} a = \cup(\cup^n a).$$

再作集

$$\begin{aligned} cl(a) &= \cup_{n\in\omega}(\cup^n a) \\ &= a \cup (\cup a) \cup (\cup^2 a) \cup (\cup^3 a) \cup \cdots \end{aligned}$$

设 $y \in x \in cl\,(a)$. 若 $x \in \cup^n a$, 则 $y \in \cup^{n+1} a$, 故 $y \in cl\,(a)$. 这说明 cl (a) 是可递集.

下面证明 $cl\,(a) \subset WF$, 由此可得 $a \subset WF$.

(反证)假设 $b = cl\,(a) - WF \neq 0$, 则 b 有 $\in$ - 极小元, 设为 x_0 . 可以断言 $x_0 \subset WF$. 事实上, 任取 $y \in x_0$, 则由 x_0 的极小性得 $y \notin b$. 但由 cl(a) 的可递性知 $y \in cl\,(a)$, 从而 $y \in WF$ (否则 $y \in b$). 这就说明了 $y \in x_0 \rightarrow y \in WF$, $x_0 \subset WF$, $x_0 \in WF$, $x_0 \notin b$, 矛盾.

证 毕

定义 1 (集 a 的可递闭包)

命题 2 证明中引入的集 $cl\,(a) = \cup_{n\in\omega}(\cup^n a)$ 叫做集 a 的可递闭包, 其中 $\cup^0 a = a$, $\cup^{n+1} a = \cup(\cup^n a)$.

定义毕

可递闭包 cl (a) 的简单性质见练习十一题 2 .

例 1 $a = \{1, 5, 7\}$, 求 cl (a)

$\cup a = \{0, 1, 2, \cdots, 6\} = 7.$

$cl\,(a) = \{0, 1, 2, \cdots, 7\} = 8.$

此例中 a 不是可递集，但 cl (a) 是.

例 2　$b = \{\{3\}, \{4, \{7\}\}\}$，求 cl (b).

$\cup b = \{3, 4, \{7\}\}$,

$\cup^2 b = \{0, 1, 2, 3, 7\}$,

$\cup^3 b = 7$,

......

cl $(b) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \{3\}, \{7\}, \{4, \{7\}\}\}$.

有了基础公理，对任何集 x 都不会有 $x \in x$. (见 3.4 命题 4 后的说明.) 现在可以说，$\in$ - 反自反性是所有集的共同性质.

按照基础公理，任何集都是良基集，都具有 $\in$ - 良基性(非空子集有 $\in$ - 极小元). 这样，序数的概念得到一点简化，序数就是 $\in$ - 全序的可递集.

承认基础公理，集论的论域就被限制于良基集类 WF . 这样，由空集开始(从无到有!)反复用通常的集运算便可得到一切集.

练 习 十 一

1. 证明: $b \neq 0 \rightarrow a \times b \notin a$.
2. 证明 a 的可递闭包 cl (a) 具有性质:

(Ⅰ) cl(a) 是包含 a 的最小可递集，即

$a \subset b \wedge b$ 是可递集 $\rightarrow$ cl $(a) \subset b$;

(Ⅱ) 若 a 是可递集，则 cl $(a) = a$;

(Ⅲ) 若 $x \in a$，则 cl $(x) \subset$ cl (a);

(Ⅳ) cl$(a) = a \cup (\cup_{x \in a}$ cl $(x))$.

3. 设 $a = \{\{1\}, \{\omega + 2\}, \{\{\omega\}\}\}$. 求 cl$(a)$.

4 基 数

4.1 等 势

怎样计算集的元素个数? 另一个问题是: 怎样比较两个集的元素多少? 对于有限对象进行计数的经验表明, 对前一问题的回答依赖于对第二个问题的回答. 计数过程实际上是一个比较过程.

定义 1 (等势)

集 a 与集 b 等势, 记为 $a \approx b$, 如果存在 a 到 b 的双射.

定义毕

由双射的性质即知:

$a \approx a$,

$a \approx b \ \rightarrow \ b \approx a$,

$a \approx b \ \wedge \ b \approx c \ \rightarrow \ a \approx c$.

良序集 a 与良序集 b 同构(用 $a \sim b$ 表示), 是指存在 a 到 b 的保序双射(2.1 节定义 4). 对良序集来说, 同构比等势要求更高; 同构当然等势.

容易建立 ω 到 $\omega+1$ 的双射 f (例如, 令 $f(0)=\omega$, $f(n+1)=n$), 故 $\omega \approx \omega+1$. 类似有 $\omega \approx \omega+2$, $\omega \approx \omega+3$, $\cdots$

命题 1 $\omega \approx \omega \times \omega$.

证明 我们来建立 $\omega \times \omega$ 到 ω 的双射 f. 令

$$f(m,\ n)=\tfrac{1}{2}(m+n)(m+n+1)+m.$$

(I) 先证 f 是单射. 设 $m \neq i$ 或 $n \neq j$, 要证 $f(m,n) \neq f(i,j)$.

情形 1 $m+n=i+j$, 此时 $m \neq i$, 这导致

$$f(m,n) = \frac{1}{2}(m+n)(m+n+1)+m$$
$$\neq \frac{1}{2}(i+j)(i+j+1)+i = f(i,j).$$

情形 2　$m+n \neq i+j$，不妨设 $m+n > i+j$，这时 $m+n \geq i+j+1$，$m+n+1 \geq i+j+2$，于是

$$\begin{aligned} f(m,n) &= \tfrac{1}{2}(m+n)(m+n+1)+m \\ &\geq \tfrac{1}{2}(i+j+1)(i+j+2) \\ &\geq \tfrac{1}{2}(i+j+1)(i+j)+i+j+1 \\ &> \tfrac{1}{2}(i+j)(i+j+1)+i = f(i,j). \end{aligned}$$

(Ⅱ)　再证 f 是满射.

任取 $k \in \omega$，要证存在 $m,n \in \omega$ 使 $f(m,n) = k$. 取满足 $k < \frac{1}{2}(l+1)(l+2)$ 的最小 l. 于是有

$$\tfrac{1}{2}l(l+1) \leq k < \tfrac{1}{2}(l+1)(l+2).$$

情形 1　$k = \frac{1}{2}l(l+1)$，此时取 $n = l$，$m = 0$ 便可.

情形 2　$k > \frac{1}{2}l(l+1)$，此时取 $m = k - \frac{1}{2}l(l+1)$，$n = l - m$. 于是

$$\begin{aligned} f(m,n) &= \frac{1}{2}(m+n)(m+n+1)+m \\ &= \frac{1}{2}l(l+1)+m = k. \end{aligned}$$

证　毕

想要建立集与集之间的双射，常非易事. 下面的引理 1 和 Bernstein 定理是用来证明等势的常用方法.

引理 1　$c \subset b \subset a \wedge c \approx a \rightarrow a \approx b \approx c$.

证明　已知双射 $g: a \longrightarrow c$，要构造双射 $f: a \longrightarrow b$.

引进集 a_n：$a_0 = a - b$，$a_1 = g[a_0]$，$\cdots$，$a_{n+1} = g[a_n]$，$\cdots$. 令

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & 若\ x \in \cup_{n\in\omega} a_n \\ x & 若\ x \in a - \cup_{n\in\omega} a_n \end{cases}$$

f 是满射. 事实上，b 中任意 y 在 f 之下都有原象：

若 $y \in a - \cup_{n\in\omega} a_n$，则 $f(y) = y$，即 y 以自己为原象；

若 $y \in a_n$，则存在原象 $x \in a_{n-1}$，$f(x) = g(x) = y$.
为证 f 是单射，设 x_1，$x_2 \in a$，$x_1 \neq x_2$. 下证 $f(x_1) \neq f(x_2)$.

情形 1　$x_1, x_2 \in \bigcup_{n\in\omega} a_n$，此时因 g 是单射，故有

$$f(x_1) = g(x_1) \neq g(x_2) = f(x_2).$$

情形 2　$x_1, x_2 \in a - \bigcup_{n\in\omega} a_n$，此时

$$f(x_1) = x_1 \neq x_2 = f(x_2).$$

情形 3　$x_1 \in a_k$ 而 $x_2 \in a - \bigcup_{n\in\omega} a_n$. 此时

$$f(x_1) = g(x_1) \in a_{k+1}，但\ f(x_2) = x_2 \notin \bigcup_{n\in\omega} a_n.$$

证　毕

用 $a \precsim b$ 表示 a 到 b 存在着单射. 易知:

$$a \precsim b \wedge b \approx c \rightarrow a \precsim c,$$
$$a \precsim b \wedge a \approx c \rightarrow c \precsim b,$$
$$a \subset b \rightarrow a \precsim b.$$

定理 1　(Bernstein)

$$a \precsim b \wedge b \precsim a \rightarrow a \approx b.$$

证明　已知存在单射 $f: a \longrightarrow b$，单射 $g: b \longrightarrow a$. 于是有

$$a \approx f[a],\ b \approx g[b]; \tag{1}$$
$$f[a] \approx g[f[a]] \subset g[b] \subset a. \tag{2}$$

由 (1)，(2) 利用引理1 便得 $a \approx g[b] \approx b$.

证　毕

下面用 $a \prec b$ 表示 $a \precsim b \wedge a \not\approx b$.

定理 2　(Cantor)

$$a \prec \mathcal{P}(a).$$

证明　a 到 $\mathcal{P}(a)$ 的单射可这样建立：$\forall x \in a$，令 $f(x) = \{x\}$.

下证不存在 a 到 $\mathcal{P}(a)$ 的满射. (反证)假设存在满射

$$f: a \longrightarrow \mathcal{P}(a).$$

任取 $x \in a$，有 $f(x) \subset a$. 作 a 的子集

$$b = \{x \in a \mid x \notin f(x)\}.$$

因 f 是满射且 $b \in \mathcal{P}(a)$, 故 b 在 a 中必有原象, 即存在 $y \in a$ 使 $f(y) = b$. 由此便得出矛盾:

$$y \in f(y) \ \text{即} y \in b \ \rightarrow \ y \notin f(y);$$
$$y \notin f(y) \ \rightarrow \ y \in b \ \text{即} y \in f(y).$$

证 毕

作为定理 2 的特例, 有

$$\omega \prec \mathcal{P}(\omega) \prec \mathcal{PP}(\omega) \prec \mathcal{PPP}(\omega) \prec \cdots$$

我们知道有理数集 $\mathrm{Q} \approx \omega$, 但实数集 R 要比 ω 大得多:

实数集 $\mathrm{R} \approx \mathcal{P}(\omega)$. (参见练习十二题 3)

命题 1 的证明建立了 $\omega \times \omega$ 到 ω 的双射. 现改用 Bernstein 定理, 则证明更为简单. 首先有 $\omega \lesssim \omega \times \omega$: 由 $f(n) = (0, n)$ 定义的 f 给出了 ω 到 $\omega \times \omega$ 的单射. 然后证 $\omega \times \omega \lesssim \omega$. 任取 $m, n \in \omega$, 令 $g(m, n) = 2^m 3^n \in \omega$, 则 g 是 $\omega \times \omega$ 到 ω 的单射.

练 习 十 二

1. 验证如下定义的 f 也是 $\omega \times \omega$ 到 ω 的双射:

$$f(m, n) = 2^m(2n + 1) - 1.$$

2. 证明: $a \approx b \ \rightarrow \ \mathcal{P}(a) \approx \mathcal{P}(b)$.
3. 证明: 实数集 $\mathrm{R} \approx \mathcal{P}(\omega)$.
4. 证明: $\mathcal{P}(\omega) \approx {}^{\omega}2$, 其中 ${}^{\omega}2 = \{f \mid f : \omega \longrightarrow 2\}$.

4.2 基 数

利用等势的方法计算集的元素多少, 需要有计数标准. 首先自然想到用序数作标准. 但注意到 $\omega + 1 \approx \omega + 2$, 便知并非任何序数都适宜用作这种计数标准. 通常用作计数标准的是一种特殊的序数 —— 基数.

定义 1 (基数)

序数 κ 叫做基数，如果 $\forall \alpha \in \kappa\ (\alpha \not\approx \kappa)$.

定义毕

如不加说明，κ, λ, μ, ν 等字母自动表示基数.

基数首先是序数，故具有序数全部性质，例如基数之间也是用 $\in$ 可比大小的，由基数组成的集是 $\in$ - 良序集，等等.

基数有别于其他序数，它与比它小的序数不等势. 一个基数是彼此互相等势的一类序数中的最小者. 序数 $\omega+1$ 不是基数，因为 $\omega \approx \omega+1$. 同样 $\omega+2$, $\omega+3$, $\cdots$ 等都不是基数.

命题 1 (Ⅰ) $\kappa \approx \lambda \rightarrow \kappa = \lambda$,

(Ⅱ) $\kappa \precsim \lambda \rightarrow \kappa \leq \lambda$,

(Ⅲ) $\kappa \prec \lambda \rightarrow \kappa < \lambda$.

证明 (Ⅰ) 由基数定义即得.

(Ⅱ) 设 $\kappa \precsim \lambda$. 若 $\lambda < \kappa$，则 $\lambda \precsim \kappa$，由 Bernstein 定理得 $\lambda \approx \kappa$，这与 κ 是基数不符.

(Ⅲ) 由 (Ⅰ), (Ⅱ) 即得.

证 毕

命题 1 (Ⅰ) 关于基数的性质是其他序数不具有的. 这是基数的特征 —— 不同基数不会互相等势.

命题 2 (Ⅰ) 自然数 $n \not\approx n+1$,

(Ⅱ) $\alpha \approx n \rightarrow \alpha = n$.

证明 (Ⅰ) 对 n 归纳. 首先 $0 \not\approx 1$，因为不存在 0 到 $\{0\}$ 的双射. 假设 $n \not\approx n+1$，但 $n+1 \approx n+2$，即存在双射 $f: n+1 \longrightarrow n+2$. 若 $f(n) = n+1$，则把 f 限制在 n 上得到 n 到 $n+1$ 的双射，矛盾. 若 $f(n) \neq n+1$，则有 $x_0 \in n$, $f(x_0) = n+1$. 交换 x_0 和 n 的函数值 $n+1$ 和 $f(n)$，使得 $n+1$ 到 $n+2$ 的新的双射 g: $g(n) = n+1$, $g(x_0) = f(n)$，对其他 x, $g(x) = f(x)$. 把 g 限制在 n 上又得 n 到 $n+1$ 的双射，也产生矛盾.

(Ⅱ) α 和 n 都是序数，故有 $n \in \alpha \vee \alpha \in n \vee \alpha = n$. 以下说明当 $\alpha \approx n$ 时，$n \in \alpha$ 与 $\alpha \in n$ 都不可能.

若 $n \in \alpha$，则 $n+1 \leq \alpha$，$n+1 \subset \alpha$. 由 $\alpha \approx n$ 与 $n \subset n+1 \subset \alpha$ 利用 4.1 节引理 1 得 $n \approx n+1$，与 (Ⅰ) 矛盾.

若 $\alpha \in n$，则 $\alpha \in \omega$，同理得 $\alpha \approx \alpha + 1$，也与 (Ⅰ) 矛盾.

证 毕

命题 3 **自然数 n 是基数.**

证明 n 是序数，且 $\forall \alpha \in n\,(\alpha \not\approx n)$ (由命题 2 (Ⅱ)，$\alpha \approx n \to \alpha = n$).

证 毕

自然数是人们最先使用的基数，但不能用来为无限集计数. 第一个超穷基数是 ω.

命题 4 **ω 是基数.**

证明 $\omega \in \mathrm{On}$，且 $\forall n \in \omega\,(n \not\approx \omega)$ (由命题 2，$\omega \approx n \to \omega = n$).

证 毕

ω 作为基数出现时常写作 ω_0 或 $\aleph_0$ (读作"阿列夫零").

我们希望有比 ω 更大的基数. 但 $\omega+1$，$\omega+2$ 以至所有 $\omega+n$ 都不是基数. 再大一些，$\omega \cdot 2$ 与 ω^2 也都不是基数(见练习十三题 1，2).

有没有比 ω 大的基数存在? 下面的重要定理对此作了肯定回答.

定理 1 **对任意集 a，$a^+ = \{\beta \mid \beta \precsim a\}$ 是基数.**

证明 分以下三步.

1° 先证 a^+ 是集. 取 a 的所有良序子集，作

$$w = \{(b, <) \mid b \subset a, \text{“}<\text{”是 } b \text{ 上的良序}\}.$$

$w \subset \mathcal{P}(a) \times \mathcal{P}(a \times a)$，说明 w 是集. 现考察 w 与 a^+ 的关系. 因 a 的同一子集 b 可以有许多不同的良序结构 $(b, <)$. 由 3.1 节定理 1 知

$$\text{对每个 } (b,<) \in w, \ \exists! \text{ 序数 } \beta \sim b.$$

同构当然等数，故 $\beta \approx b \subset a$，由此得 $\beta \lesssim a$，这说明 $\beta \in a^+$. 反之，当 $\beta \in a^+$ 即当 $\beta \lesssim a$ 时，存在 a 的某个子集 b 和双射 $f: \beta \longrightarrow b$. f 诱导了 b 的良序"$<$"且 $\beta \sim b$ (参见练习四题 3). 于是 $(b,<) \in w$. 至此可利用替换公理 (ZF7) 由 w 是集断言 a^+ (w 的"影象")也是集.

2° 为证 a^+ 是序数，注意 a^+ 由序数组成，由 2.2 节定理 1 知 a^+ 是 $\in$ - 良序的，故只用证 a^+ 是可递集.

设 $\gamma \in \beta \in a^+$. β 是可递集，故 $\gamma \subset \beta$，$\gamma \lesssim \beta$; $\beta \in a^+$，故 $\beta \lesssim a$. 这导致 $\gamma \lesssim a$，$\gamma \in a^+$.

3° 最后证 a^+ 是基数. 任取 $\beta \in a^+$，则有 $\beta \lesssim a$ 但 $\beta \not\approx a^+$. 事实上，若 $\beta \approx a^+$，则导致 $a^+ \lesssim a$，$a^+ \in a^+$.

证　毕

定理 1 为我们提供了产生较大基数的方法.

命题 5　　**比 κ 大的最小基数是 $\kappa^+ = \{\beta \mid \beta \lesssim \kappa\}$.**

证明　由定理 1 知 κ^+ 是基数. $\kappa^+ > \kappa$，是因为 $\kappa \lesssim \kappa$，所以 $\kappa \in \kappa^+$. κ^+ 是比 κ 大的最小基数、最小性来自事实:

$$\lambda < \kappa^+ \ \rightarrow \ \lambda \lesssim \kappa \ \rightarrow \ \lambda \leq \kappa.$$

证　毕

由命题 5 即知不存在最大的基数. 反复用命题 5，可由 ω_0 (即 ω) 出发得到一个比一个大的基数:

$$\omega_0, \ \omega_1, \ \omega_2, \ \cdots, \ \omega_n, \ \omega_{n+1}, \ \cdots$$

其中 $\omega_{n+1} = \{\beta \mid \beta \lesssim \omega_n\}$. 作为上述过程的终结，令

$$\omega_\omega = \cup\{\omega_n \mid n \in \omega\}.$$

按下面的命题 6，ω_ω 也是基数，且比每个 ω_n 都大. 由 ω_ω 为新的起点、又可用命题 5 得到比 ω_ω 更大的基数.

命题 6　　**设 a 由基数组成，则 $\cup a$ 也是基数，且是 a 的最小上界.**

证明　由 2.2 节命题 5(Ⅱ) 知 $\cup a$ 是序数，且是 a 的最小上

界. 还要证 $\forall\alpha \in \cup a\ \alpha \not\approx \cup a$. 设 $\alpha \in \cup a$, 则有 $\kappa \in a$ 使 $\alpha \in \kappa$, 于是 $\alpha \subset \kappa \subset \cup a$. 这时若有 $\alpha \approx \cup a$, 则 $\alpha \approx \kappa$ (4.1 节引理 1), 这与 κ 是基数矛盾.

证 毕

有了命题 5, 6, 我们可使每个序数 α 联系着一个超限基数 ω_α:

定义 2 (基数 ω_α)

$\omega_0 = \omega$,

$\omega_{\alpha+1} = \{\beta \mid \beta \precsim \omega_\alpha\}$ 即 ω_α^+.

$\omega_\alpha = \cup\{\omega_\gamma \mid \gamma \in \alpha\}$, 若 α 是极限序数.

定义毕

ω_α 也写作 $\aleph_\alpha$.

ω_α 系列是否把所有超限基数包括无遗? 回答是肯定的:

命题 7 (Ⅰ) **定义 2 中的每个 ω_α 都是基数,**

(Ⅱ) **每个比 ω 大的基数一定是某个 ω_α,**

(Ⅲ) $\alpha < \beta \leftrightarrow \omega_\alpha < \omega_\beta$.

证明 (Ⅰ) 对 α 归纳. $\omega_0 = \omega$ 是基数; 若 ω_α 是基数, 则 $\omega_{\alpha+1} = \omega_\alpha^+$ 也是基数(定理 1); 对极限序数 α, 若对每个 $\gamma \in \alpha$, ω_γ 都是基数, 则 ω_α 也是基数(命题 6).

(Ⅱ) 任取基数 $\kappa > \omega_0$. 作

$$b = \{\beta \leq \kappa \mid \kappa \leq \omega_\beta\}.$$

因 $\kappa \leq \omega_\kappa$(参见练习十三题 3), 故 $\kappa \in b$, $b \neq 0$. 记 b 中最小序数为 α, 下证 $\kappa = \omega_\alpha$. 因 $\alpha \in b$, 故 $\kappa \leq \omega_\alpha$. 现只用证 $\kappa \not< \omega_\alpha$. (反证)假设 $\kappa < \omega_\alpha$, 则总产生矛盾:

$\alpha = 0$ 时, $\kappa < \omega_0$ 与前提矛盾;

$\alpha = \beta + 1$ 时, $\beta < \alpha \leq \kappa$ (因 $\alpha \in b$), $\omega_{\beta+1} = \omega_\beta^+$ 是比 ω_β 大的最小基数, 这时只能有 $\kappa \leq \omega_\beta$ (否则与 $\omega_{\beta+1}$ 的最小性矛盾), 这导致 $\beta \in b$, 又与 α 在 b 中的最小性矛盾;

α 是极限序数时, $\omega_\alpha = \cup\{\omega_\gamma \mid \gamma \in \alpha\}$. 这时 $\kappa < \omega_\alpha$ 导致存

在某个 $\gamma < \alpha$ 使 $\kappa < \omega_\gamma$，这又与 α 在 b 中的最小性矛盾.

(Ⅲ) ($\rightarrow$) 对 β 归纳. $\alpha < \beta = \gamma + 1$ 时，$\omega_\beta = \omega_\gamma^+ > \omega_\gamma$. 若 $\alpha = \gamma$，则 $\omega_\beta > \omega_\alpha$；若 $\alpha \in \gamma$，则 $\omega_\beta > \omega_\gamma > \omega_\alpha$，最后一步用了归纳假设.

β 为极限序数时，$\omega_\beta = \bigcup\{\omega_\gamma \mid \gamma \in \beta\}$. 由 $\alpha < \beta$ 得 $\alpha + 1 < \beta$，故 $\omega_{\alpha+1} \subset \omega_\beta$，最后有 $\omega_\alpha < \omega_{\alpha+1} \leq \omega_\beta$.

($\leftarrow$) 若 $\alpha \geq \beta$ 则有 $\omega_\alpha \geq \omega_\beta$.

证 毕

定义 3 (**后继基数与极限基数**)

$\omega_{\alpha+1}$ 叫做 ω_α 的后继基数. α 是极限序数时，ω_α 叫做极限基数.

定义毕

ω_α 不管是后继基数还是极限基数，作为序数，都是极限序数(练习十三题 4).

基数由小到大的顺序是

$$0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n,\ \cdots,\ \omega_0,\ \omega_1,\ \cdots,\ \omega_n,\ \cdots,$$
$$\omega_\omega,\ \omega_{\omega+1},\ \cdots,\ \omega_{\omega\cdot 2},\ \cdots,\ \omega_{\omega\cdot n},\ \cdots,\ \omega_{\omega^2},\ \cdots$$

把基数宇宙 —— 所有基数构成的类记作 Cn. 假如 Cn 是集，则由命题 6 知 $\bigcup$Cn 是基数，且是比所有基数都大的最大基数. 但我们知道不存在最大的基数. 这就是 Cantor 悖论. 悖论产生的原因在于假定了 Cn 是集. Cn 不是集而是真类.

因 Cn$\subset$On，故 Cn 的非空子类也是 On 的非空子类. 由 3.2 节定理 1 可知 Cn 的任一非空子类必有最小基数.

定理 2 (**类 Cn 上的超限归纳法**)

$$\forall\kappa\ (\forall\lambda < \kappa\ \varphi(\lambda)\ \rightarrow\ \varphi(\kappa))\ \rightarrow\ \forall\kappa\ \varphi(\kappa).$$

证明 逐字逐句翻译 3.2 节定理 2 的证明.

证 毕

练 习 十 三

1. 证明: $\omega \cdot 2$ 不是基数.
2. 证明: ω^2 不是基数.
3. 证明: $\alpha \leq \omega_\alpha$.
4. 证明: 比 ω_0 大的基数都一定是极限序数.

4.3 集的基数

有了基数的概念, 现在来讨论对给定的集怎样计算该集中元素的多少. 我们把这种计算理解为拿这个集与基数比较, 看它与哪个基数等势. 就是说, 把集的元素个数定义为与该集等势的基数, 并把这个基数叫做该集的基数:

定义 1 (**集 a 的基数 $|a|$**)

集 a 的基数用 $|a|$ 表示, 指与 a 等势的基数.

定义毕

因整数集 $Z \approx \omega$, 有理数集 $Q \approx \omega$, 故 $|Z| = |Q| = \omega_0$.

$|a|$ 是与 a 等势的基数, 也就是与 a 等势的最小序数. 所以对任何序数 α, $|\alpha| \leq \alpha$ 总是成立的. 问题是: 对任给的集 a, $|a|$ 是否都一定有意义? 也就是问: 对任意集 a, 是否一定存在某个基数 κ 使 $a \approx \kappa$ 从而 $|a| = \kappa$? 这个问题与选择公理有关, 将在后面一节详细讨论. 现在每当出现了 $|a|$, 就意味着 a 有基数 $|a|$.

由定义 1 即知

$$|a| = |b| \leftrightarrow a \approx b.$$

定义 2 (**有限集与可数集**)

$|a| < \omega_0$ 时, 集 a 叫做有限集.

$|a| \leq \omega_0$ 时, 集 a 叫做可数集.

$|a| = \omega_0$ 时, 集 a 叫做可数无限集.

定义毕

a 是有限集，意为 a 与某个自然数等势.

定理 1 有限集不和自己的任何真子集等势.

证明 设 a 是有限集，$|a| < \omega_0$. 假设 a 和它的某个真子集 b 等势：$b \subset a$，$b \neq a$ 且 $a \approx b$. 任取 a 到 b 的单射 g，再任取 $x \in a - b$. 用单射 g 可得 a 的一串元素：

$$g^0(x) = x,\ g^1(x) = g(x),\ g^2(x) = g(g(x)), \cdots,$$
$$g^n(x) = g(g^{n-1}(x)), \cdots$$

以上元素互不相同，即当 $m \neq n$ 时 $g^m(x) \neq g^n(x)$ (对 n 归纳即知). 这个事实保证了可以作出下面从 ω_0 到 a 的单射 f : $f(n) = g^n(x)$. f 是单射，说明 $\omega_0 \precsim a$. 但已知 $|a| < \omega_0$，这导致 $\omega_0 \approx |a|$，与 ω_0 是基数矛盾.

证 毕

定理 1 指出，整体大于部分是有限集的特征.

命题 1 $|a|$ 有意义 $\leftrightarrow$ a 可良序.

证明 ($\rightarrow$) $|a|$ 有意义，即存在基数 κ 使 $a \approx \kappa$. 于是存在 κ 到 a 的双射，这个双射用 κ 的良序 $\in$ 诱导了 a 的良序(练习四题 3).

($\leftarrow$) 若可建立 a 的良序使之成为良序集，则由 3.1 节定理 1 知存在序数 $\alpha \approx a$. 与 a 等势的序数的最小者就是 $|a|$.

证 毕

练 习 十 四

1. 证明：$a \precsim b \ \rightarrow\ |a| \leq |b|$; $a \prec b \ \leftrightarrow\ |a| < |b|$.
2. 设 $a \subset n$ 但 $a \neq n$，求证存在 $m < n$ 使 $|a| = m$.
3. 设 a，b 是有限集，求证 $a \times b$ 也是有限集.
4. 证明：若 $|a| = n$，则 $|\mathcal{P}(a)| = 2^n$.
5. 证明：若 $\forall n \in \omega\ |v_n| < \omega$.
6. 证明：可数无限集可与真子集等势.

4.4 良序定理, 选择公理

上节最后建立了事实: $|a|$ 是否有意义, 取决于 a 是否可良序. 就是说, a 是否可良序, 关系到是否可用与基数等势的方式计算 a 的元素个数.

下面我们尝试证明命题: "任何集都可良序". 我们发现, 为了完成该命题的证明, 过去已有的公理是不够用的.

良序定理 任何集都可良序.

证明 任给集 a, 为了建立 a 的良序, 先作映射

$$g: \mathcal{P}(a) - \{0\} \longrightarrow a,$$

使得对 a 的任一非空子集 x, g 具有性质 $g(x) \in x$. 取充分大的序数 α, 使 α 到 a 不存在单射(例如, 取 $\alpha = a^+$, 则不会有 $\alpha \lesssim a$, 否则导致 $\alpha \in \alpha$. a^+ 定义见 4.2 节定理 1). 再任取一个不在 a 中的集 s_0(即 $s_0 \notin a$). 利用具有性质 $g(x) \in x$ 的 g 再作一映射

$$f: \alpha \to a \cup \{s_0\},$$

对任意 $\gamma \in \alpha$,

$$f(\gamma) = \begin{cases} g(a - f[\gamma]) & 若\ a - f[\gamma] \neq 0 \\ s_0 & 若\ a - f[\gamma] = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

其中 $f[\gamma]$ 指 $\{f(\beta) \mid \beta < \gamma\}$. 这是序数 α 上的超限归纳定义. 具体可按序写:

$$\begin{aligned} &f(0) = g(a),\ (\in a) \\ &f(1) = g(a - f[1]) = g(a - \{f(0)\}), \\ &\qquad\qquad (\in a - \{f(0)\}) \\ &f(2) = g(a - f[2]) = g(a - \{f(0), f(1)\}), \\ &\qquad\qquad (\in a - \{f(0), f(1)\}) \\ &\cdots\cdots \end{aligned}$$

由 $f(\gamma)$ 的定义式 (1) 知，当 $a - f[\gamma] \neq 0$ 时，总有

$$f(\gamma) \in a - f[\gamma]. \text{（因为 } g(x) \in x\text{）} \qquad (2)$$

当 $a - f[\gamma] = 0$ 时(即用 g 抽尽了 a 中的元素后)，$f(\gamma) = s_0$.

α 中一定会出现使 $a - f[\gamma] = 0$ 的 γ. 事实上，如果这样的 γ 始终不出现，由 $f(\gamma)$ 的作法 (1) 便可知始终有

$$f(\gamma) = g(a - f[\gamma]),\ \gamma \in \alpha,$$

这说明 f 是 α 到 a 的单射(理由是，当 $\beta < \gamma$ 时 $f(\beta) \in f[\gamma]$，故 $f(\beta) \notin a - f[\gamma]$，但 $f(\gamma) \in a - f[\gamma]$ (由 (2))，所以 $f(\beta) \neq f(\gamma)$)，这与 α 的取法矛盾(α 原被取为不存在到 a 的单射的序数).

令 γ_0 是使 $a - f[\gamma] = 0$ 的最小序数 γ. 这时 $a = f[\gamma_0]$，于是便由 f 用 γ_0 中的良序"$\in$"诱导出 a 中的良序.

证 毕

有了良序定理，任何集 a 经良序之后，$|a|$ 都有意义.

审查良序定理的证明，我们发现其中用到了一个新的结论. 下面叙述这个结论，并尝试加以证明.

命题 $*$ 对任意集 a 都存在选择函数 $g : \mathcal{P}(a) - \{0\} \longrightarrow a$ 使 $g(x) \in x$，其中 x 是 a 的任一非空子集.

证明 先设 a 是良序集. 任取 $x \in \mathcal{P}(a) - \{0\}$. 令

$$g(x) = x \text{ 的最小元 } (\in x).$$

当 a 不是良序集时，先用良序定理使 a 得到良序.

证 毕

我们用良序定理证明了命题 $*$，而良序定理的证明要用命题 $*$. 上面的循环论证说明:

$$\text{良序定理} \leftrightarrow \text{命题 } *\ .$$

命题 $*$ 涉及到与函数的定义法有关的一条原则：同时可从每个非空集中各选一个元素. 如果这些非空集的个数有限，这样的选取不成问题. 如果有无穷多个非空集，是否承认"无限次的同时选择"为有意义的事?

现在把这条原则总结成一条公理:

(AC)　　**选择公理**

对任意集 c，存在以 c 为定义域的选择函数 g，使得对 c 的每个非空元素 x，$g(x) \in x$.

上面陈述的选择公理 (AC) 与命题 * 稍有不同，但都与良序定理互相等价. 检查我们上面作的循环论证，易知以下事实得到了证明:

$$(AC) \rightarrow 命题 * \rightarrow 良序定理 \rightarrow (AC).$$

选择公理在数学的各个分支中都有重要的应用，成了很方便的工具. 选择公理的代数形式是 Zorn 引理.

Zorn 引理　　**若非空偏序集 a 的每个全序子集在 a 中都有上界，则 a 必有极大元.**

定理 1　　(AC) → Zorn 引理.

证明　设非空集 a 以 $<$ 为偏序，且 a 的每个全序子集在 a 中有上界. 我们要找出 a 的极大元.

取选择函数

$$g: \mathcal{P}(a) - \{0\} \longrightarrow a, \quad g(x) \in x;$$

再取充分大的序数 α，使 α 到 a 不存在单射. 另任取集 $s_0 \notin a$. 在 α 上归纳定义函数 $f: \alpha \longrightarrow a \cup \{s_0\}$，

$$f(\gamma) = \begin{cases} g(f[\gamma] \text{ 在 } a \text{ 中的严格上界的集}) \\ \qquad\qquad\qquad \text{若 } f[\gamma] \text{ 在 } a \text{ 中有严格上界} \\ s_0 \qquad\qquad\quad \text{若 } f[\gamma] \text{ 在 } a \text{ 中无严格上界} \end{cases}$$

x 是 $f[\gamma]$ 的严格上界，指 $\forall \beta \in \gamma\ f(\beta) < x$.

现证一定存在 $\gamma \in \alpha$ 使 $f(\gamma) = s_0$. (反证)设 $\forall \gamma \in \alpha f(\gamma) \neq s_0$，则对任意 $\gamma \in \alpha$，$f(\gamma)$ 是 $f[\gamma]$ 在 a 中的某个严格上界(由选择函数 g 选出). 当 $\gamma_1 \in \gamma_2$ 时，$f(\gamma_1) \in f[\gamma_2]$，而 $f(\gamma_2)$ 是 $f[\gamma_2]$ 的严格上界，故 $f(\gamma_1) < f(\gamma_2)$. 这说明 f 是严格递增函数，从而 f 是 α 到 a 的单射，于是与 α 的取法矛盾.

既然存在 γ 使 $f(\gamma) = s_0$，取使 $f(\gamma) = s_0$ 的最小 γ，记为 γ_0. 这时 $f[\gamma_0]$ 一定是 a 的全序子集，理由是：$\delta \in \beta \in \gamma_0$ 时，注意 γ_0 的最小性，$f(\delta) \neq s_0$ 且 $f(\beta) \neq s_0$，而 $f(\beta)$ 是 $f[\beta]$ 在 a 中的严格上界，故 $f(\delta) < f(\beta)$. 由 Zorn 引理的假设条件，$f[\gamma_0]$ 在 a 中存在上界 b. b 就是要找的 a 的极大元. 事实上，若 b 不是极大元，则有 $x \in a$，$b < x$. 而这说明 x 是 $f[\gamma_0]$ 的严格上界，从而 $f(\gamma_0) \in a$，$f(\gamma_0) \neq s_0$，矛盾.

证 毕

定理 2 Zorn 引理 $\to$ (AC).

证明 给定集 c，我们要找 c 上的选择函数. 作

$$a = \{f \mid f \text{ 是 } c \text{ 的某个子集上的选择函数}\}.$$

f 是 $d(\subset c)$ 上的选择函数，是指 f 由这样的有序对 $(x, f(x))$ 构成，$x \in d$，$f(x) \in x$ 或 $x = 0$.

研究偏序结构 $(a, <)$，其中"$<$"为"$\subset$ 但 $\neq$". 任取 a 的全序子集 b（b 的成员 f 都是 c 的子集上的选择函数；b 的全序性是指对任意 f_1，$f_2 \in b$，$f_1 \subset f_2$ 与$f_2 \subset f_1$ 二者必居其一）. b 的全序性保证了 $\cup b$ 也是选择函数，是由 b 中选择函数所包含的有序对的全体组成，故有

$$\mathrm{Dom}(\cup b) \subset c.$$

这说明 $\cup b \in a$，且 $\cup b$ 是 b 在 a 中的上界. 现在可用 Zorn 引理断言 a 有极大元 g.

剩下要证明 $\mathrm{Dom}(g) = c$，从而 g 就是 c 上的选择函数. (反证)假设存在 $x \in c - \mathrm{Dom}(g)$. $x \neq 0$ 时取 $y \in x$；$x = 0$ 时取 $y = 0$. 于是得 $g \cup \{(x, y)\} \in a$，与 g 的极大性矛盾.

证 毕

(AC) 与代数中常用的 Tukey 引理也是等价的.

Tukey 引理 若非空集 a 具有有限特征，则 a 按"$\subset$"有极大元素. a 具有有限特征，是指 a 具有性质：

$$x \in a \leftrightarrow x \text{ 的所有有限子集都属于 } a.$$

定理 3　　Zorn 引理 → Tukey 引理.

证明　设 a 有有限特征. 研究偏序结构 $(a, <)$, 其中"$<$"为"$\subset$ 但 $\neq$". 任取 a 的全序子集 b. $\cup b \in a$, 这是因为 $\cup b$ 的任一有限子集属于 a(事实上, 因 b 为全序子集, 故 $\cup b$ 的有限子集必是 b 的某个元素的有限子集, 因而是 a 的元素). 又知 $\cup b$ 是 b 的上界 $(\forall x \in b,\ x \subset \cup b)$. 现在可用 Zorn 引理得出结论: a 有极大元.

证　毕

定理 4　　Tukey 引理 → (AC).

证明　任给集 c, 作

$$a = \{f \mid f \text{ 是 } c \text{ 的某个子集上的选择函数}\}.$$

易知

$$f \in a \ \leftrightarrow\ f \text{ 的任一子集} \in a,$$

故 a 具有有限特征. 由 Tukey 引理, a 按"$\subset$"有极大元 g. 与定理 2 证明中的最后部分一样可证 g 是 c 上的选择函数.

证　毕

至此我们证明了:

良序定理 ↔ $|a|$ 对每个集 a 都有意义(4.3节命题 1)
　　　　↔ 选择公理 (AC)
　　　　↔ Zorn 引理
　　　　↔ Tukey 引理

最后再给出 (AC) 的另一种变形(后面要用到):

命题 **　　**对任何集 c, 存在序数 α 和以 α 为定义域的函数 f, 使 $c \subset \mathrm{Ran}(f)$.**

定理 5　　**良序定理 ↔ 命题 **.**

证明　(→)　将 c 良序, c 的序型设为 α, 则 $c \sim \alpha$. 保序双射 $f: \alpha \longrightarrow c$ 即为所求函数.

(←) 用命题 ** 中的函数 f 定义任意集 c 的良序如下. 对任意 $x \in c$, 令

$$g(x) = \min\{\beta \in \alpha \mid f(\beta) = x\}.$$

$g: c \longrightarrow \alpha$ 是单射，理由是：若 $x_1, x_2 \in c$，$x_1 \neq x_2$ 且 $g(x_1) = g(x_2)$，则存在 $\beta \in \alpha$，$f(\beta) = x_1$，$f(\beta) = x_2$，与 f 是映射矛盾. 利用单射 g 便可得到 c 中的良序 R：

$$x \; R \; y \; \leftrightarrow \; g(x) < g(y).$$

证 毕

与选择公理等价的命题相当多. 数学的各分支中，有许多命题不用选择公理便得不到证明. 选择公理得到普遍的承认，除了它的重要应用，还有一个重要原因是 Gödel 于 1938 年证明了：假如 ZF 是无矛盾的，那么 ZF+(AC) 也是无矛盾的(详见 6.7 节).

增加了 (AC) 后的 ZF 记作 ZFC：

$$\text{ZFC} = \text{ZF+(AC)}.$$

如果把所有可良序的集构成的类记作 WO，那么选择公理可简单表示为

(AC)　　V=WO.

练 习 十 五

1. 设 c 由有限个非空元素组成. 不用 (AC) 证明存在 c 上的选择函数.

2. 利用 Tukey 引理证明：任意向量空间定有基底.

3. 用选择公理证明：任意关系 r 可变成与 r 有相同定义域的函数 f (即：$f \subset r$，f 是函数，$\text{Dom}(f) = \text{Dom}(r)$).

4.5　基数与选择公理有关的性质

承认选择公理，可以建立基数的更多性质. 本节中命题的证明都使用 (AC).

命题 1 任意集 a 和 b 之间可进行比较: $a \precsim b \vee |b| \precsim a$.

证明 作为序数, $|a|$ 和 $|b|$ 可比较大小: $|a| \le |b| \vee |b| \le a$.

当 $|a| \le |b|$ 时, $|a| \subset |b|$, $|a| \precsim |b|$, $a \precsim b$;

当 $|b| \le |a|$ 时, $|b| \subset |a|$, $|b| \precsim |a|$, $b \precsim a$.

证 毕

4.3 节中曾把"a 是有限集"定义为 $|a| < \omega_0$. 无限集可定义为非有限集:

$$a \text{ 是无限集} \leftrightarrow |a| \ge \omega_0.$$

命题 2 无限集必包含可数无限子集.

证明 a 是无限集, 则 $\omega_0 \le |a|$, $\omega_0 \precsim |a|$, $\omega_0 \precsim a$. 于是存在 ω_0 到 a 的单射 f, $\omega_0 \approx f[\omega_0] \subset a$. $f[\omega_0]$ 便是 a 的可数无限子集.

证 毕

定义 1 (Dedekind 有限集与无限集)

Dedekind 有限集指不与自己的真子集等势的集.

Dedekind 无限集指能与自己的真子集等势的集.

定义毕

命题 3 a 是有限集 $\leftrightarrow$ a 是 Dedekind 有限集.

证明 $(\rightarrow)$ 即 4.3 节定理 1 .

$(\leftarrow)$ 设 a 是无限集. 由命题 2, a 必含有可数无限子集, 这时易知 a 可与真子集等势, 故不是 Dedekind 有限集(参见练习十四题 6).

证 毕

命题 4 若存在 a 到 b 的满射, 则 $b \precsim a$, 进而 $|b| \le |a|$.

证明 先使 a 成为良序集. 已知存在满射 $f: a \longrightarrow b$, 由 f 可定义 b 到 a 的单射 g:

$g(y) = f^{-1}[\{y\}]$ 的最小元. (f 为满射, 故 $f^{-1}[\{y\}] \neq 0$)

g 是单射, 是因为若 $g(y_1) = g(y_2)$, 则

$$y_1 = f(g(y_1)) = f(g(y_2)) = y_2.$$

于是 $b \precsim a$，$|b| \precsim |a|$；$|b| \leq |a|$.

证 毕

命题 5 可数个可数集的并还是可数集，即

$$\forall n \in \omega \; |a_n| \leq \omega \;\rightarrow\; |\bigcup_{n\in\omega} a_n| \leq \omega.$$

证明 先使 $\mathcal{P}((\bigcup_{n\in\omega} a_n) \times \omega)$ 成为良序集. 因 $|a_n| \leq \omega$，$a_n \precsim \omega$，故存在 a_n 到 ω 的单射 f_n(不一定唯一)：$f_n \in \mathcal{P}((\bigcup_{n\in\omega} a_n) \times \omega)$. 在良序集 $\mathcal{P}((\bigcup_{n\in\omega} a_n) \times \omega)$ 中取出最小的这种单射 f_n，对每个 n 取定 f_n 后，便可建立 $\bigcup_{n\in\omega} a_n$ 到 ω 的单射 f：

$$f(x) = 2^m 3^{f_m(x)},$$

其中 m 是 $x \in a_n$ 的最小 n. 于是 $|\bigcup_{n\in\omega} a_n| \precsim \omega$.

证 毕

由命题 5 立即可得 $|\mathrm{v}_\omega| = \omega$，这里 $\mathrm{v}_\omega = \bigcup_{n\in\omega} \mathrm{v}_n$，见 3.4 节.

练 习 十 六

1. 试证：可数个可数无限集的并是可数无限集，即

$$\forall n \in \omega \; |a_n| = \omega \;\rightarrow\; |\bigcup_{n\in\omega} a_n| = \omega.$$

2. 证明可数无限个互不相交的非空有限集的并是可数无限集.

3. 不用 (AC) 证明 $|\mathrm{v}_\omega| = \omega$.

4.6 基数的加、乘运算

基数运算是自然数运算的推广，定义时应尽可能保存自然数运算的性质.

为了与序数的加、乘法相区别，对基数，我们用 $+^{\cdot}$ 与 $\times^{\cdot}$ 分别表示加法与乘法.

定义 1 (基数的加法)

$$\kappa \dotplus \lambda = |\kappa \times \{0\} \cup \lambda \times \{1\}|.$$

定义毕

命题 1 $m \dotplus n = m + n$，右边是通常自然数加法.

证明 对 n 归纳证明 $m \times \{0\} \cup n \times \{1\} \approx m + n$.

$n = 0$ 时，$m \times \{0\} \cup 0 \times \{1\} = m \times \{0\} \approx m = m + 0$.

$m \times \{0\} \cup (n+1) \times \{1\}$

$= (m \times \{0\} \cup n \times \{1\} \cup \{(n, 1)\})$

$\approx m + n \cup \{(n, 1)\}$ (用了归纳假设)

$\approx m + n \cup \{m + n\} = m + n + 1.$

证 毕

由定义 1 易知基数加法满足交换律，结合律.

定义 2 (基数的乘法)

$$\kappa \dot{\times} \lambda = |\kappa \times \lambda|.$$

定义毕

命题 2 $m \dot{\times} n = m \cdot n$，右边是通常自然数乘法.

证明 对 n 归纳证明 $m \times n \approx m \cdot n$，左边是 m 与 n 的 Descartes 积.

$m \times 0 = 0 = m \cdot 0$.

$m \times (n+1) = m \times n \cup m \times \{n\}$

$\approx m \cdot n \cup m \times \{n\}$ (用了归纳假设)

$\approx m \cdot n \times \{0\} \cup m \times \{1\}$

$\approx m \cdot n \dotplus m$ (由定义 1)

$= m \cdot n + m$ (由命题 1)

$= m \cdot (n + 1)$.

证 毕

基数乘法也满足交换律，结合律.

引理 1 (Ⅰ) $\alpha \in \kappa \rightarrow \alpha \prec \kappa$.

(Ⅱ) $n \times n \prec \omega$.(左边是 n 与 n 的 Descartes 积)

(Ⅲ) $\kappa \geq \omega$ 时，$\alpha \in \kappa \rightarrow \alpha+1 \in \kappa$.

证明 (Ⅰ) $\alpha \in \kappa$，则 $\alpha \subset \kappa$ 且 $\alpha \not\approx \kappa$(基数性质)，故 $\alpha \prec \kappa$.

(Ⅱ) $n \times n \approx n \dot{\times} n$ (由定义 2)

$$= n \cdot n \in \omega.$$

由 (Ⅰ)，$n \times n \approx n \cdot n \prec \omega$.

(Ⅲ) $\kappa \geq \omega$ 时，κ 一定是极限序数，故用 2.3 节命题 2 及命题 4 便可(参见练习十三题 4).

证 毕

我们曾证明了 $\omega \times \omega \approx \omega$ (4.1 节命题 1)，现将结论推广到一般超限基数的情形.

定理 1 (Hessenberg)

$\kappa \geq \omega$ 时，$\kappa \times \kappa \approx \kappa$，从而 $\kappa \dot{\times} \kappa = \kappa$.

证明 $\kappa \precsim \kappa \times \kappa$ 是易见的. $\alpha \longmapsto (\alpha, 0)$ 给出了所要的单射. 故只用证 $\kappa \times \kappa \precsim \kappa$.

对 $\kappa \geq \omega$ 归纳(应用 4.2 节定理 2).

已知 $\omega \times \omega \approx \omega$ (4.1 节命题 1).

假设 $\omega \leq \lambda < \kappa$ 时，$\lambda \times \lambda \precsim \lambda$.

在 $\kappa \times \kappa$ 中定义良序"$<$"如下. 任取 α，β，γ，δ，$\in \kappa$，规定:

$(\alpha, \beta) < (\gamma, \delta) \rightarrow$

(Ⅰ) $\max\{\alpha, \beta\} < \max\{\gamma, \delta\}$，或者

(Ⅱ) $\max\{\alpha, \beta\} = \max\{\gamma, \delta\}$，但 $\alpha < \gamma$

或 $\alpha = \gamma \wedge \beta < \delta$.

序数的良序性决定了上面定义的序的良序性. 由 3.1 节定理 1 知唯一存在序数 $\gamma \sim \kappa \times \kappa$，即存在保序双射 $f: \gamma \longrightarrow \kappa \times \kappa$.

现只用将 $\kappa \times \kappa$ 的替身 γ 与 κ 进行比较，证明 $\gamma \precsim \kappa$ 便可. 为此，只用证明 $\kappa \notin \gamma$，从而 $\gamma \leq \kappa$. (反证)假设 $\kappa \in \gamma$. 记

$$f(\kappa) = (\alpha, \beta) \in \kappa \times \kappa,$$

并记 $\kappa \times \kappa$ 中以 (α, β) 为限的前段为 c. 因 $\gamma \sim \kappa \times \kappa$，由 2.1 节

命题 4 知 $\kappa \sim c$(注意 κ 是 γ 中以 κ 为限的前段，见 2.2 节命题 1)，从而 $\kappa \approx c$. 不妨设 $\beta \leq \alpha$，则 $(\alpha, \beta) \in (\alpha+1) \times (\alpha+1)$，于是

$$c \subset (\alpha+1) \times (\alpha+1). \tag{1}$$

由引理 1(Ⅲ) 知

$$\alpha+1 \in \kappa. \tag{2}$$

这时有以下两种可能:

1° $\alpha+1 < \omega$，此时 $(\alpha+1) \times (\alpha+1) \prec \omega \prec \kappa$(用了引理 1(Ⅱ)).

2° $\omega < \alpha+1$，此时 $|\alpha+1| \notin \omega$，否则由 4.2 节命题 2(Ⅱ) 得 $\alpha+1 \in \omega$. 于是有

$$\omega \leq |\alpha+1| \leq \alpha+1 < \kappa. \tag{3}$$

由 (3) 用归纳假设得

$$|\alpha+1| \times |\alpha+1| \precsim |\alpha+1|. \tag{4}$$

而由 (2) 及引理 1(Ⅰ) 知 $|\alpha+1| \prec \kappa$，由此及 (4) 得

$$(\alpha+1) \times (\alpha+1) \approx |\alpha+1| \times |\alpha+1| \prec \kappa.$$

总之 1° 与 2° 两种情形都有 $(\alpha+1) \times (\alpha+1) \prec \kappa$. 结合 (1)，最后得

$$\kappa \approx c \precsim (\alpha+1) \times (\alpha+1) \prec \kappa,\ \text{矛盾}.$$

证　毕

推论 1　设 $\kappa,\ \lambda \geq \omega$，则有

$$\kappa \dotplus \lambda = \kappa \dot{\times} \lambda = \max\{\kappa, \lambda\}.$$

证明　不妨设 $\kappa \leq \lambda$. 要证明

$$\kappa \times \{0\} \cup \lambda \times \{1\} \approx \kappa \times \lambda \approx \lambda.$$

事实上,

$$\begin{aligned}\lambda \approx \lambda \times \{1\} &\subset \kappa \times \{0\} \cup \lambda \times \{1\} \\ &\subset \lambda \times \{0\} \cup \lambda \times \{1\} = \lambda \times 2 \\ &\subset \lambda \times \kappa \approx \kappa \times \lambda \subset \lambda \times \lambda \approx \lambda.\end{aligned}$$

证　毕

从以上证明可以看出，当 $\kappa > 1$，$\lambda \geq \omega$ 时，结论也正确．事实上当 $\kappa = 1$，$\lambda \geq \omega$ 时，结论也正确（练习十七题 1 ）．

将定理 1 用到实数集 R，有

$$|R| \times^{\cdot} |R| = |R|,\ |R| \times |R| \approx |R|,$$

于是 $$R \times R \approx R.$$

就是说，平面上的点和直线上的点一样多．进一步可知 n 维空间 R^n 的点和直线上的点一样多．

下面的命题 3 是 4.5 节命题 5 的推广．

命题 3 设 $\kappa \geq \omega$，且对每个 $\alpha < \kappa$ 有 $|a_\alpha| \leq \kappa$，则

$$|\cup_{\alpha<\kappa} a_\alpha| \leq \kappa .$$

证明 因 $|a_\alpha| \leq \kappa$，故对每个 α 可取 a_α 到 κ 的一个单射 f_α．利用这些 f_α 定义映射 $f:\ \cup_{\alpha<\kappa} a_\alpha \longrightarrow \kappa \times \kappa$ 如下：

$$\forall x \in \cup_{\alpha<\kappa} a_\alpha,\ f(x) = (\alpha,\ f_\alpha(x)),$$

其中 α 取为使 $x \in a_\alpha$ 的最小 α．f 是单射，故

$$|\cup_{\alpha<\kappa} a_\alpha| \leq |\kappa \times \kappa| = \kappa$$

证 毕

$n \in \omega$ 时，${}^n a$ 也写成 a^n，表示 n 到 a 的映射的全体，也说成是由 a 的 n 个元素(可以重复)组成的有限序列的全体．

a^0 规定为 $\{0\}$．

命题 4 设 $|a| = \kappa$，则 $|a^n| = \kappa\ (n \geq 1)$．

证明 对 n 归纳．取双射 $f:\ a \longrightarrow \kappa$．

$n > 1$ 时，假设 $|a^{n-1}| = \kappa$，则有双射 $f_{n-1}:\ a^{n-1} \longrightarrow \kappa$．下面定义映射 $g:\ a^n \longrightarrow \kappa \times \kappa$．$\forall (x_1,\ \cdots,\ x_n) \in a^n$，令

$$g(x_1,\ \cdots,\ x_n) = (f_{n-1}(x_1,\ \cdots,\ x_{n-1}),\ f(x_n)).$$

g 也是双射，故 $|a^n| = \kappa \times^{\cdot} \kappa = \kappa$．

证 毕

命题 4 可改为 $|a| \leq \kappa \ \rightarrow\ |a^n| \leq \kappa$，只要在证明中把双射改为单射便可．

定义 3 （集在映射族下的闭包）

设 $b \subset a$. b 在 n 元映射 $f: a^n \longrightarrow a$ 之下封闭, 指 $f[b^n] \subset b$.

设 $\mathcal{F}$ 是由若干 a 上有限元映射构成的集, 且 $c \subset a$. c 在 $\mathcal{F}$ 之下的闭包, 指满足以下条件的最小 b:

(Ⅰ) $c \subset b \subset a$,

(Ⅱ) b 在 $\mathcal{F}$ 中的每个映射之下皆封闭.

定义毕

对给定的 $c \subset a$ 及 $\mathcal{F}$, 定义 3 中的闭包 b 总是存在的, 且可表示成

$$b = \cap\{d \subset a \mid c \subset d,\ d \text{ 在 } \mathcal{F} \text{ 的每个映射之下封闭}\}.$$

定理 2 设 $\kappa \geq \omega$, $c \subset a$, $|c| \leq \kappa$, $\mathcal{F}$ 由 a 上的有限元映射组成, 映射个数不超过 κ. 若 b 是 c 在 $\mathcal{F}$ 之下的闭包, 则 $|b| \leq \kappa$.

证明 任取 $d \subset a$. 若 $|d| \leq \kappa$, 则 $|d^n| \leq \kappa$(由命题 4). 若 $f \in \mathcal{F}$ 是 m 元映射, 则 $|f[d^m]| \leq \kappa$(由 4.5 节命题 4). 令

$$b_0 = c,$$

$$b_{n+1} = b_n \cup (\cup\{f[b_n^m] \mid f \text{ 是 } \mathcal{F} \text{ 中的 } m \text{ 元映射}\}).$$

利用命题 3 对 n 归纳可证每个 $|b_n| \leq \kappa$. c 在 $\mathcal{F}$ 之下的闭包是

$$b = \cup_{n \in \omega} b_n.$$

再用命题 3 得 $|b| \leq \kappa$.

证 毕

若把定理 2 条件中的 $\kappa \geq \omega$ 改为 $\kappa < \omega$, 则由 4.5 节命题 5 知 $|b| \leq \omega$.

练 习 十 七

1. 证明: 当 $\lambda \geq \omega$ 时, $1 \dotplus \lambda = 1 \dot{\times} \lambda = \lambda$.
2. 证明: $\dotplus$ 和 $\dot{\times}$ 满足交换律与结合律.
3. 证明: 每个无限群一定有可数无限的子群.

4. 证明: (Ⅰ) $\kappa +^{\cdot} \lambda = |\kappa + \lambda|$,

(Ⅱ) $\kappa \times^{\cdot} \lambda = |\kappa \cdot \lambda|$,

其中 $\kappa + \lambda$ 与 $\kappa \cdot \lambda$ 分别是序数的加与乘 (定义见 3.3 节).

4.7 基数的指数运算, 连续统假设

我们已经知道 $\mathcal{P}(\omega) \approx {}^{\omega}2$(见练习十二题 4), 其中

$$^{\omega}2 = \{f \mid f: \omega \longrightarrow 2\}.$$

现把这个结论推广到更一般的情形. 本节证明中自由使用 (AC).

命题 1 $\mathcal{P}(a) \approx {}^{a}2$, 其中 $^{a}2 = \{f \mid f: a \longrightarrow 2\}$.

证明 要构造 $\mathcal{P}(a)$ 到 $^{a}2$ 的双射 g. 对任意 $b \subset a$, 取如下定义的函数 $c_b \in {}^{a}2$ 作为 $g(b)$:

$$c_b(x) = \begin{cases} 1 & 若\ x \in b \\ 0 & 若\ x \in a - b \end{cases}$$

c_b 叫做 $b(\subset a)$ 的特征函数. g 是单射, 因为 a 的不同子集有不同的特征函数; g 是满射, 因为任一 $f: a \longrightarrow 2$ 都是 a 的某个子集的特征函数.

证 毕

定义 1 (基数的指数运算)

$$\kappa^{\lambda} = |{}^{\lambda}\kappa|, 其中\ {}^{\lambda}\kappa = \{f \mid f: \lambda \longrightarrow \kappa\}.$$

定义毕

例如 3 到 2 的映射共有 8 个, 故 $2^3 = |{}^{3}2| = 8$.

定义 1 与普通自然数的指数运算是一致的, 但与基数作为序数的序指数运算(见 3.3 节)一般是不一致的.

不作说明时, κ^{λ} 表示基数运算而不是序指数运算.

命题 2 $\kappa^{\lambda +^{\cdot} \mu} = \kappa^{\lambda} \times^{\cdot} \kappa^{\mu}$, $(\kappa^{\lambda})^{\mu} = \kappa^{\lambda \times^{\cdot} \mu}$.

证明 容易验证以下事实:

(Ⅰ) $a \approx b \rightarrow {}^{a}c \approx {}^{b}c$,

(Ⅱ) $a \cap b = 0 \rightarrow {}^{a\cup b}c \approx {}^{a}c \times {}^{b}c$,

(Ⅲ) ${}^{a}({}^{b}c) \approx {}^{a\times b}c$,

于是有

$$
\begin{aligned}
{}^{\lambda +' \mu}\kappa &\approx {}^{\lambda\times\{0\}\cup\mu\times\{1\}}\kappa && (\text{由 (Ⅰ) 及 } +' \text{ 的定义}) \\
&\approx {}^{\lambda\times\{0\}}\kappa \times {}^{\mu\times\{1\}}\kappa && (\text{由 (Ⅱ)}) \\
&\approx {}^{\lambda}\kappa \times {}^{\mu}\kappa \approx \kappa^{\lambda} \times \kappa^{\mu} && (\text{定义 1}) \\
&\approx \kappa^{\lambda} \times' \kappa^{\mu}, && (\times' \text{ 的定义}) \\
{}^{\mu}(\kappa^{\lambda}) &\approx {}^{\mu}({}^{\lambda}\kappa) \approx {}^{\mu\times\lambda}\kappa && (\text{由 (Ⅲ)}) \\
&\approx {}^{\lambda\times\mu}\kappa \approx {}^{\lambda\times'\mu}\kappa .
\end{aligned}
$$

证 毕

定理 1 设 $2 \le \kappa \le \lambda$ 且 $\lambda \ge \omega$, 则 $\kappa^{\lambda} = 2^{\lambda} = |\mathcal{P}(\lambda)|$.

证明 λ 到 λ 的映射 $f \in \mathcal{P}(\lambda \times \lambda)$, 故 ${}^{\lambda}\lambda \subset \mathcal{P}(\lambda \times \lambda)$. 我们有

$$2^{\lambda} \subset {}^{\lambda}\kappa \subset {}^{\lambda}\lambda \subset \mathcal{P}(\lambda \times \lambda) \approx \mathcal{P}(\lambda) \approx {}^{\lambda}2,$$

于是 ${}^{\lambda}\kappa \approx {}^{\lambda}2 \approx \mathcal{P}(\lambda)$.

证 毕

我们知道实数集 $\mathrm{R} \approx \mathcal{P}(\omega) \approx {}^{\omega}2$; 故

$$|\mathrm{R}| = 2^{\omega} > \omega \text{ . (由 4.1 节定理 2)}$$

现问: $|\mathrm{R}| = ?$ 也就是问: 直线上有多少个点?

(CH) **连续统假设**

$$2^{\omega} = \omega_1 .$$

(GCH) **广义连续统假设**

$$\forall\alpha\ (2^{\omega_\alpha} = \omega_{\alpha+1}) .$$

(CH) 是 (GCH) 当 $\alpha = 0$ 时的特殊情形.

在不假设选择公理成立的情形下, 广义连统假设的表述是

$$\forall\kappa\ ({}^{\kappa}2 \approx \kappa^{+}),$$

其中 κ^{+} 是比超穷基数 κ 大的最小基数(见 4.2 节命题 5).

ω_1 是比 ω 大的最小基数. 如果 $2^\omega = \omega_1$ 成立, 即连续统假设为真, 那么在 ω 和 $|\mathrm{R}| = 2^\omega$ 之间没有其他基数. 这样, 实数集 R 的任何无限子集要么和 ω 等势, 要么和 R 等势.

Cantor 于 1878 年提出了 $2^\omega = \omega_1$ 的猜想, 并设法证明它, 但未成功.

本世纪以来关于这个问题的研究取得了重大进展. Gödel(1938 年)和 Cohen(1963 年)的工作得出了重要结论: CH 和 GCH 是" ZFC 不可判定"的, 即: 在 ZFC 系统中既不能证明 CH, 也不能推翻 GCH .

练 习 十 八

1. $|^m n| = ?$
2. $\kappa \geq \omega$ 时, $\kappa^3 = ?$
3. 证明: $2^{\omega_\alpha} \geq \omega_{\alpha+1}$.
4. 设 $\kappa > 0$. 证明:

   (Ⅰ) $\lambda > \mu \rightarrow \kappa^\lambda \geq \kappa^\mu$;

   (Ⅱ) $\kappa^\lambda > \kappa^\mu \rightarrow \lambda > \mu$.

4.8 共 尾 数

为深入研究基数的性质, 例如基数指数运算的性质, 需要引入共尾数的概念.

定义 1 (与极限序数共尾)

设 α 为极限序数. 序数 β 与 α 共尾, 指存在 β 到 α 的无界映射. 映射 $f: \beta \longrightarrow \alpha$ 是无界映射, 指 $f[\beta]$(即 Ran(f))在 α 中无界:

$$\forall \alpha_0 \in \alpha \, \exists \beta_0 \in \beta \ \ f(\beta_0) \geq \alpha_0 .$$

定义毕

例 1 ω 与 $\omega \cdot 2$ 共尾, 因为有无界映射 $f: \omega \longrightarrow \omega \cdot 2$,

$$f(n) = \omega + n\,.$$

因 $\omega\cdot 2 = \omega + \omega = \cup\{\omega + n \mid n \in \omega\}$，故 $f[\omega]$ 在 $\omega\cdot 2$ 中无界.

由定义 1 易知:

(Ⅰ) 若 $\beta \approx \alpha$，则 β 与 α 共尾，因为等势双射是无界的.

(Ⅱ) 若 β 与 α 共尾且 $\beta \leq \gamma$，则 γ 与 α 也共尾.

因为只对极限序数讨论共尾的概念，所以下面定义 2 中的共尾数也只对极限序数有定义.

定义 2 (共尾数)

极限序数 α 的共尾数记为 $\mathrm{cf}(\alpha)$，指与 α 共尾的最小序数.

定义毕

由定义，若 $\beta = \mathrm{cf}(\alpha)$，则意味着:

(Ⅰ) 存在 β 到 α 的无界映射(β 与 α 共尾);

(Ⅱ) 若存在 γ 到 α 的无界映射(即 γ 也与 α 共尾)，则 $\beta \leq \gamma$(β 具有最小性);

(Ⅲ) $\beta \leq \alpha$ 即 $\mathrm{cf}(\alpha) \leq \alpha$(注意 α 到 α 的恒等映射是无界的).

命题 1 存在严格递增的无界映射 $f:\ \mathrm{cf}(\alpha) \longrightarrow \alpha$.

证明 任取无界映射 $g:\ \mathrm{cf}(\alpha) \longrightarrow \alpha$. 用 g 可定义 $\mathrm{cf}(\alpha)$ 到 α 的递增的无界映射 f:

$$f(\beta) = \max(g(\beta),\ \cup\{f(\gamma)+1 \mid \gamma < \beta\})\,.$$

g 的无界性决定了 f 的无界性. 由 2.2 节命题 5 (Ⅱ)，f 满足

$$\gamma < \beta \ \rightarrow\ f(\gamma) < f(\beta)\,.$$

证 毕

由命题 1 知 $\mathrm{cf}(\alpha)$ 也是极限序数(否则 $\mathrm{cf}(\alpha)$ 到 α 的严格递增的映射都有界).

命题 2 若存在 α 到 β 的严格递增无界映射，则 $\mathrm{cf}(\alpha) = \mathrm{cf}(\beta)$.

证明 设 f 是 α 到 β 的严格递增无界映射.

(Ⅰ) 先证 $\mathrm{cf}(\beta) \leq \mathrm{cf}(\alpha)$.

取 $\mathrm{cf}(\alpha)$ 到 α 的无界映射 g. g 与 f 复合起来, 记为 h : $\mathrm{cf}(\alpha) \longrightarrow \beta$. h 是无界的, 即 $h[\mathrm{cf}(\alpha)]$ 在 β 中无界, 理由如下. 对任一 $\beta_0 \in \beta$, 可取 $\alpha_0 \in \alpha$ 使 $f(\alpha_0) > \beta_0$(由 f 的无界性). 再取 $\gamma \in \mathrm{cf}(\alpha)$ 使 $g(\gamma) > \alpha_0$(由 g 的无界性). f 严格增, 故 $h(\gamma) = f(g(\gamma)) > f(\alpha_0) > \beta_0$.

$\mathrm{cf}(\alpha)$ 与 $\mathrm{cf}(\beta)$ 都与 β 共尾, 而 $\mathrm{cf}(\beta)$ 具有最小性, 故 $\mathrm{cf}(\beta) \leq \mathrm{cf}(\alpha)$.

(II) 下证 $\mathrm{cf}(\alpha) \leq \mathrm{cf}(\beta)$.

取 $\mathrm{cf}(\beta)$ 到 β 的无界映射 g. 现构造 $\mathrm{cf}(\beta)$ 到 α 的无界映射 h: $\forall\gamma \in \mathrm{cf}(\beta)$, 令

$$h(\gamma) = \alpha \text{ 中使 } f(\delta) > g(\gamma) \text{ 的最小 } \delta . \tag{1}$$

任取 $\alpha_0 \in \alpha$, $f(\alpha_0) \in \beta$. 由 g 的无界性知存在 $\beta_0 \in \mathrm{cf}(\beta)$ 使

$$g(\beta_0) \geq f(\alpha_0) . \tag{2}$$

现可断言 $h(\beta_0) > \alpha_0$, 从而证明 h 是无界的. (反证)设 $\alpha_0 \geq h(\beta_0)$, 那么

$$\begin{aligned} f(\alpha_0) &\geq f(h(\beta_0)) \qquad (f \text{ 的递增性}) \\ &> g(\beta_0) \qquad (\text{由 } h \text{ 的定义 (1), } \gamma \text{ 取为 } \beta_0) \end{aligned}$$

这与 (2) 矛盾. $h: \mathrm{cf}(\beta) \longrightarrow \alpha$ 既为无界映射, 由 $\mathrm{cf}(\alpha)$ 的最小性得 $\mathrm{cf}(\alpha) \leq \mathrm{cf}(\beta)$.

证 毕

命题 3 $\mathrm{cf}(\mathrm{cf}(\alpha)) = \mathrm{cf}(\alpha)$.

证明 由命题 1 知存在 $\mathrm{cf}(\alpha)$ 到 α 的严格递增的无界映射, 再由命题 2 使得 $\mathrm{cf}(\mathrm{cf}(\alpha)) = \mathrm{cf}(\alpha)$ ($\mathrm{cf}(\alpha)$ 是极限序数, 见命题 1 后说明).

证 毕

定义 3 (正则序数与奇异序数)

正则序数是指与自己的共尾数相等的极限序数.

非正则序数叫做奇异序数.

定义毕

命题 4　　**对任何极限序数 α，$\mathrm{cf}(\alpha)$ 总是正则序数.**

证明　由定义 3 与命题 3 即得.

证　毕

命题 5　　**正则序数一定是基数.**

证明　正则序数 α 若不是基数，则有 $\beta < \alpha$，$\beta \approx \alpha$，β 与 α 共尾. 于是由 $\mathrm{cf}(\alpha)$ 的最小性得 $\mathrm{cf}(\alpha) \leq \beta < \alpha$，这与 α 的正则性矛盾.

证　毕

因 ω 是最小的极限序数，故 $\mathrm{cf}(\omega) = \omega$. ω 是正则的基数. 但并非任何基数都是正则的，例如 ω_ω(见命题 6).

命题 6　　**对极限序数 α，$\mathrm{cf}(\omega_\alpha) = \mathrm{cf}(\alpha)$. 作为特例，$\mathrm{cf}(\omega_\omega) = \omega$.**

证明　按命题 2，只要能建立 α 到 ω_α 的严格递增无界映射 f 便可. 对任意 $\beta \in \alpha$，令 $f(\beta) = \omega_\beta$，f 即为所求. f 的严格递增性见 4.2 节命题 7(Ⅲ). α 是极限序数，故 $\omega_\alpha = \cup\{\omega_\gamma \mid \gamma \in \alpha\}$. 易见 $f[\alpha]$ 在 ω_α 中无界.

证　毕

命题 7　　**设 $f : \beta \longrightarrow \alpha$ 是无界映射，且 α 是极限序数(此时 β 与 α 共尾)，则**

$$\alpha = \cup f[\beta] .$$

证明　先由 α 的可递性可得 $\cup f[\beta] \subset \alpha$.

任取 $\gamma \in \alpha$. 已知 $f[\beta]$ 无界，故存在 $\delta \in \beta$ 使 $f(\delta) > \gamma$. 由此知

$$\gamma \in \cup f[\beta] .$$

证　毕

命题 8　　**后继基数 κ^+ 一定是正则基数.**

证明　只用证明对任意 $\alpha < \kappa^+$，不存在 $|\alpha|$ 到 κ^+ 的无界映射，所以 $\mathrm{cf}(\kappa^+) = \kappa^+$.(反证)设 $f : |\alpha| \longrightarrow \kappa^+$ 是无界映射，则由命题 7 知 $\kappa^+ = \cup f[|\alpha|] = \cup_{\beta<|\alpha|} f(\beta)$.

$\beta < |\alpha|$ 时，$f(\beta) \in \kappa^+$，故 $|f(\beta)| \leq \kappa$；又因 $|\alpha| < \kappa^+$，故 $|\alpha| \leq \kappa$. 由 4.6 节命题 3 得 $\kappa^+ \leq \kappa$，矛盾.

证 毕

Cantor 证明了 $a \prec \mathcal{P}(a) \approx {}^a 2$，由此可得 $2^\kappa > \kappa$. 现在可进一步断言当 $\kappa \geq \omega$ 时 $\mathrm{cf}(2^\kappa) > \kappa$. 为此先建立下面重要的 König 引理.

引理 1 (König)

设 $\kappa \geq \omega$ 且 $\mathrm{cf}(\kappa) \leq \lambda$，则 $\kappa^\lambda > \kappa$.

证明 只用证任意 $g: \kappa \longrightarrow {}^\lambda\kappa$ 都不是满射，从而 $\kappa \neq \kappa^\lambda$.

因 $\lambda \geq \mathrm{cf}(\kappa)$，故存在无界映射 $f: \lambda \longrightarrow \kappa$. 现任取 $\alpha \in \lambda$. 将 α 固定，则对任一 $\beta \in f(\alpha) \in \kappa$，有

$$\beta \in \kappa,\ g(\beta) \in {}^\lambda\kappa,\ (g(\beta))(\alpha) \in \kappa .$$

故自然有了 $f(\alpha)$ 到 κ 的子集 $\{(g(\beta))(\alpha) \mid \beta < f(\alpha)\}$ 的满射. 由 4.5 节命题 4 知该子集一定是 κ 的真子集:

$$|\{(g(\beta))(\alpha) \mid \beta < f(\alpha)\}| \leq |f(\alpha)| < \kappa. \tag{3}$$

下面构造 $h: \lambda \longrightarrow \kappa$ 使 $h \notin g[\kappa]$，从而证明 g 不是满射. 根据 (3)，可设

$$h(\alpha) = \text{集}\ (\kappa - \{(g(\beta))(\alpha) \mid \beta < f(\alpha)\})\ \text{中的最小序数},$$

其中 $\alpha \in \lambda$.

现证 $h \notin g[\kappa]$.(反证)设 $h \in g[\kappa]$，即存在 $\beta_0 \in \kappa$ 使 $h = g(\beta_0) \in {}^\lambda\kappa$. 于是由 h 的定义可得

$$(g(\beta_0))(\alpha) = h(\alpha) \notin \{(g(\beta))(\alpha) \mid \beta < f(\alpha)\},$$

由此即知 $\beta_0 \geq f(\alpha)$. 因 α 任意取自 λ，故 $\beta_0 + 1$ 成了 $f[\lambda]$ 的上界，这与 f 的无界性矛盾.

证 毕

引理 1 证明中用了 4.5 节命题 4，故使用了 (AC) .

定理 1 若 $\kappa \geq \omega$，则 $\mathrm{cf}(2^\kappa) > \kappa$.

证明 若 $\mathrm{cf}(2^\kappa) \leq \kappa$，则由引理 1 得 $(2^\kappa)^\kappa > 2^\kappa$，但

$$(2^\kappa)^\kappa = 2^{\kappa \times \kappa} = 2^\kappa，矛盾.$$

证 毕

推论 1 $2^\omega \neq \omega_\omega$.

证明 由定理 1，$\mathrm{cf}(2^\omega) > \omega$；但由命题 6，$\mathrm{cf}(\omega_\omega) = \omega$.

证 毕

如果除了承认 (AC) 还承认 (GCH)，则可得下面的结果.

定理 2 设 $\kappa \geq 2$，$\lambda \geq 1$，且 $\kappa \geq \omega$ 或 $\lambda \geq \omega$，那么

(Ⅰ) $\kappa \leq \lambda \ \rightarrow \ \kappa^\lambda = \lambda^+$，

(Ⅱ) $\mathrm{cf}(\kappa) \leq \lambda < \kappa \ \rightarrow \ \kappa^\lambda = \kappa^+$，

(Ⅲ) $\lambda < \mathrm{cf}(\kappa) \ \rightarrow \ \kappa^\lambda = \kappa$.

证明 (Ⅰ) 由 4.7 节定理 1 及 (GCH) 即得 $\kappa^\lambda = 2^\lambda = \lambda^+$.

(Ⅱ) 由引理 1 有 $\kappa^\lambda > \kappa$，又 $\kappa^\lambda \leq \kappa^\kappa = 2^\kappa = \kappa^+$.

(Ⅲ) 先证

$$^\lambda\kappa = \bigcup\{^\lambda\alpha \mid \alpha < \kappa\}. \tag{4}$$

设 $f \in {}^\lambda\kappa$. 因 $\lambda < \mathrm{cf}(\kappa)$，故 f 不是无界映射. 于是存在 $\alpha \in \kappa$，α 是 $f[\lambda]$ 的上界. 这说明 $f \in {}^\lambda\alpha$，且

$$f \in \bigcup\{^\lambda\alpha \mid \alpha < \kappa\}.$$

若 $f \in {}^\lambda\alpha(\alpha < \kappa)$，则当然有 $f \in {}^\lambda\kappa$. (4) 证毕.

再证当 $\alpha < \kappa$ 时，

$$|^\lambda\alpha| \leq (\max(|\alpha|, \lambda))^+ \leq \kappa. \tag{5}$$

事实上，$|^\lambda\alpha| = |^\lambda|\alpha|| = |\alpha|^\lambda$，于是

当 $\lambda \geq |\alpha|$ 时，$|\alpha|^\lambda = \lambda^+$ （由(Ⅰ)）；

当 $\lambda < |\alpha|$ 时，$|\alpha|^\lambda \leq |\alpha|^{|\alpha|} = |\alpha|^+$ （也由(Ⅰ)）.

总之

$$|^\lambda\alpha| = |\alpha^\lambda| \leq (\max(|\alpha|, \lambda))^+.$$

又因 $|\alpha| \leq \alpha < \kappa$，且 $\lambda < \mathrm{cf}(\kappa) \leq \kappa$，故 (5) 证毕.

由 (4)，(5) 及 4.6 节命题 3 便得 $\kappa^\lambda = \kappa$.

证 毕

练 习 十 九

1. 设 ω_α 是正则极限基数(被叫做弱不可达基数), 证明:

$$\omega_\alpha = \alpha .$$

2. 设 $\alpha = \bigcup_{n\in\omega}\lambda_n$, 其中 $\lambda_0 = \omega$, $\lambda_{n+1} = \omega_{\lambda_n}$. 求证:

   (Ⅰ) α 是极限序数,

   (Ⅱ) $\omega_\alpha = \alpha$,

   (Ⅲ) $\mathrm{cf}(\alpha) = \omega$,

   (Ⅳ) α 是具有性质 (Ⅰ), (Ⅱ), (Ⅲ) 的最小序数.

3. 设 κ 是正则基数. 证明: 在 GCH 之下,

$$\kappa \text{ 是极限基数} \rightarrow \kappa > \omega \text{ 且 } \forall\lambda < \kappa(2^\lambda < \kappa) .$$

(此命题可改述为: 在 GCH 之下, 弱不可达基数=强不可达基数)

5 相对无矛盾性

5.1 再谈集论的形式语言

在深入研究 ZF 系统之前，有必要先深入讨论一下集论的形式语言.

集论形式语言的字母表有多种选择而功能相同. 为了方便，从现在起采用以下字母表:

$\neg$, $\wedge$, $\exists$,), (, $=$, $\in$ 及小写的拉丁字母(可带下标).

原子公式有两种形式: $x \in y$ 和 $x = y$.

其他层次公式都由原子公式经有限次使用 $\neg$, $\wedge$ 及 $\exists x$ 得到，具有以下三种形式:

$$\neg(\varphi),\ (\varphi) \wedge (\psi),\ \exists x(\varphi).$$

其中 φ, ψ 为已有的公式, x 可换成别的变元字母.

引进一些缩写:

$\neg(\exists x(\neg(\varphi)))$ 简记为 $\forall x(\varphi)$,

$\neg((\neg(\varphi)) \wedge (\neg(\psi)))$ 简记为 $(\varphi) \vee (\psi)$,

$(\neg(\varphi)) \vee (\psi)$ 简记为 $(\varphi) \to (\psi)$,

$((\varphi) \to (\psi)) \wedge ((\psi) \to (\varphi))$ 简记为 $(\varphi) \leftrightarrow (\psi)$.

如同以前一样，常常省去一些括号，引进一些新符号，甚至把普通语言也夹进公式中去. 这样的公式不是原来意义下的公式，但随时可以写出它原来意义下的形式.

出现在 $\exists x$ 中的 x 和 $\exists x$ 作用范围中的 x 被称作是约束出现的. 不是约束出现的，便叫做是自由出现的.

如不说明，公式 $\varphi(x)$ 中的 x 指自由出现的 x. 并不排除 x 在 $\varphi(x)$ 中不自由出现. 用变元 t 去逐个替换 $\varphi(x)$ 中所有自由出现的 x 得到的结果记作 $\varphi(t)$；如果在所得结果中 t 受到约束，那么称这种代换是不自由的，否则称代换是自由的.

例如，若用 $\varphi(x)$ 表示公式

$$(\exists z(x = y)) \wedge (\exists y(x \in y)),$$

则 $\varphi(t)$ 表示公式

$$(\exists z(t = y)) \wedge (\exists y(t \in y)).$$

$\varphi(y)$ 表示公式

$$(\exists z(y = y)) \wedge (\exists y(y \in y)),$$

这种代换不是自由的，因为用 y 替换第二个 x 后，y 受到了约束.

不含有自由变元的公式叫做闭式或语句.

设 Γ 是由一些公式组成的集，φ 是某个公式. 我们用符号

$$\Gamma \vdash \varphi$$

表示 φ 从 Γ 可以形式地证明，即存在着按一定规则写出的公式的有限序列 $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$（一篇"证明文章"），使 φ_n 就是公式 φ. 这里的规则指以下四条:

(Ⅰ) 在序列中若已有 φ_i，则可写出 $\forall x\varphi_i$，x 是任一变元.

(Ⅱ) 在序列中若已有 φ_i 和 $\varphi_i \to \varphi_j$，则后面可写出 φ_j.

(Ⅲ) Γ 的任一成员可在序列中任何地方写出.

(Ⅳ) 序列中可随时写出以下形式的公式(叫做逻辑公理):

$\varphi \to (\psi \to \varphi)$,

$(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$,

$(\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \varphi)$,

$\forall x\varphi(x) \to \varphi(t)$,

这里要求 t 可以自由代换 $\varphi(x)$ 中的 x,

$\forall x(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \forall x\psi)$,

这里要求 x 不在 φ 中自由出现.

序列中还可随时写出以下形式的公式(叫做等词公理):

$$x = x\,, \qquad (\text{自反性})$$
$$x = y \;\rightarrow\; y = x\,, \qquad (\text{对称性})$$
$$(x = y \wedge y = z) \;\rightarrow\; x = z\,, \qquad (\text{可递性})$$
$$x = y \;\rightarrow\; (\varphi(x) \;\rightarrow\; \varphi(y))\,, \qquad (\text{可替换性})$$
其中 $\varphi(y)$ 是用 y 替换 $\varphi(x)$ 中(一处或多处)的 x 所得结果.

在 $\Gamma \vdash \varphi$ 中若 $\Gamma = 0$, 则写 $\vdash \varphi$, 此时 φ 叫做有效式. 若 $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi$, 即 $\varphi \leftrightarrow \psi$ 是有效式, 则说 φ 与 ψ 等价.

我们常采用 ZF 或 ZFC 作为 Γ. 这样, 集论中通常进行的证明大量可翻译成形式证明. 前几章中关于集所建立的各种命题、定理都是形为 $\Gamma \vdash \varphi$ 的结论, 其中 Γ 是 ZFC 或 ZFC 的一部分.

若 $\Gamma \vdash \varphi$ 与 $\Gamma \vdash \neg\varphi$ 对任何公式 φ 都不会同时成立, 则称 Γ 是无矛盾的, 否则称 Γ 为矛盾的.

由形式证明长度的有限性立即可知:

(Ⅰ) 若 $\Gamma \vdash \varphi$, 则存在 Γ 的有限子集 Δ 使 $\Delta \vdash \varphi$;

(Ⅱ) 若 Γ 是矛盾的, 则存在 Γ 的有限子集 Δ, Δ 是矛盾的.

记住以上这两点对后面的讨论很重要.

字母表中有两个谓词符号: $=$ 及 $\in$. 把 $\{=, \in\}$ 记作 $\mathcal{L}$. 现来讨论语言 $\mathcal{L}$ 的扩张.

1° 谓词的扩张

假设原来的公理集是 Γ. 任取一个公式 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$, 其中自由变元至多是 $x_1, \cdots, x_n$. 在 $\mathcal{L}$ 中增加一个 n 元谓词符号 S, 记

$$\mathcal{L}' = \{=, \in, S\}.$$

这时 $S(x_1, \cdots, x_n)$ 是新原子公式. 在公理集 Γ 中增加一条新公理

$$\forall x_1 \cdots x_n (S(x_1, \cdots, x_n) \leftrightarrow \varphi(x_1, \cdots, x_n)),$$

这样我们用加入一个谓词的方法实现了 $\mathcal{L}$ 的一步扩张.

例如, 公式 $\forall z(z \in x \rightarrow z \in y)$ 中有两个自由变元(x 与 y).

这时我们可引入一个二元谓词，用 $\subset$ 表示，同时增加公理

$$(*)\qquad \forall x\forall y(x\subset y\leftrightarrow\forall z(z\in x\to z\in y)).$$

这样我们用加入新谓词 $\subset$ 的方法实现了一步扩张. 如有必要，随时可用新增加的公理 $(*)$ 将 $\subset$ 消去.

2° 函数词的扩张

如果公式 $\varphi(x_1,\cdots,x_n,y)$(其中列出了所有可能的自由变元) 满足

$$\Gamma\vdash\forall x_1\cdots x_n\exists!y\varphi(x_1,\cdots,x_n,y).$$

那么我们便可在 $\mathcal{L}$ 中加入一个 n 元函数词 f：

$$\mathcal{L}'=\mathcal{L}\cup\{f\}.$$

这时 $y=f(x_1,\cdots,x_n)$ 是新原子公式. 再在 Γ 中增加一条新公理

$$\forall x_1\cdots x_n\forall y(y=f(x_1,\cdots,x_n)\leftrightarrow\varphi(x_1,\cdots,x_n,y)).$$

这样，我们用加入一个函数词的方法实现了一步扩张. $n=0$ 时，零元函数词叫做常元.

例如，因为有

$$\mathrm{ZF}\vdash\ \forall x\forall y\,\exists!z\,\forall t(t\in z\to t\in x\wedge t\in y).$$

所以可引入二元函数词 $\cap$ 、同时增加一条新公理

$$\forall x\forall y\forall z(z=x\cap y\leftrightarrow\forall t(t\in z\to t\in x\wedge t\in y)).$$

如有必要的话，用它可随时将 $\cap$ 消去.

形式集论的展开，每一处实际上使用的是经有限步扩张后的语言和公理集. 下面的逻辑定理告诉我们，有限步的上述扩张是“保守的”，即: 每个新加入的符号都是可用原来语言的符号消去的.

逻辑定理 设语言 $\mathcal{L}$ 和公理集 Γ 按上述 1° 与 2° 的方法经有限次加入谓词和函数词扩张成为 $\mathcal{L}'$ 和 Γ'. 我们有

(Ⅰ) 对 $\mathcal{L}'$ 的每个公式 φ'，存在 $\mathcal{L}$ 的公式 φ 使 $\Gamma'\vdash\varphi\leftrightarrow\varphi'$；

(Ⅱ) 对 $\mathcal{L}$ 的每个公式 φ，若 $\Gamma'\vdash\varphi$，则 $\Gamma\vdash\varphi$.

这个逻辑结论的证明，可参看 J.R.Shoenfield: Mathematical

Logic, Addison-Wesley, 1967.

设所使用的公理集 Γ 包含外延公理. 如果已知

$\Gamma \vdash \forall x_1 \cdots x_n \exists z \forall y\, (y \in z \leftrightarrow \varphi(x_1, \cdots, x_n, y))$,

则我们用 $\{y \mid \varphi(x_1, \cdots, x_n, y)\}$ 表示唯一存在的集 z(参见 1.2 节命题 1). 这时可用 $\forall t(t \in z \leftrightarrow \varphi(x_1, \cdots, x_n, t))$ 消去 $z = \{y \mid \varphi(x_1, \cdots, x_n, y)\}$.

最后再明确一下关于类的符号的处理. 在我们的形式系统中原没有类的符号. 为了方便, 可以引人类的符号, 但所有出现类符号的公式都必须可用不含类符号的公式代替.

我们常用 A, B, C, M, R, $\cdots$ 表示类. 每个类都有个相应的公式. 设 $\varphi(x)$ 是含自由变元 x 的公式. 直观上, 把 $\{x \mid \varphi(x)\}$ 叫做类. 若记 $M = \{x \mid \varphi(x)\}$, 则将公式 $\varphi(x)$ 写作 $x \in M$, 或写作 $M(x)$.

5.2 模型的形式处理

引进两个缩写:

用 $\exists x \in M \psi(x)$ 表示公式

$$\exists x(x \in M \wedge \psi(x)) \text{ (即 } \exists x(M(x) \wedge \psi(x)));$$

用 $\forall x \in M \psi(x)$ 表示公式

$$\forall x(x \in M \rightarrow \psi(x)) \text{ (即 } \forall x(M(x) \rightarrow \psi(x))).$$

定义 1 (公式 φ 对类 M 的相对式 φ^M)

对给定的公式 φ 和类 M, 把 φ 中所有存在量词 $\exists x$ 全部改为 $\exists x \in M$ 得到的新公式记作 φ^M, 叫做 φ 对 M 的相对式.

定义毕

φ 与 φ^M 的差别在于 φ^M 中的所有约束变元以类 M 为变化

范围. 我们有

$$
\begin{aligned}
&(x=y)^M \leftrightarrow x=y, && (x\in y)^M \leftrightarrow x\in y,\\
&(\varphi\wedge\psi)^M \leftrightarrow (\varphi^M\wedge\psi^M), && (\neg\varphi)^M \leftrightarrow \neg\varphi^M,\\
&(\exists x\varphi)^M \leftrightarrow \exists x\in M\varphi^M, && (\forall x\varphi)^M \leftrightarrow \forall x\in M\varphi^M.
\end{aligned}
$$

定义 2 (类 M 是公式集 Γ 的模型)

若从给定的公理集 Γ_0 出发能证明 φ^M，即 $\Gamma_0\vdash\varphi^M$，则说: 基于 Γ_0，公式 φ 在 M 中为真. 若基于 Γ_0，公式集 Γ 中的每个公式在非空类 M 中为真, 则说: 基于 Γ_0，M 是 Γ 的模型.

定义毕

每当说到"为真"或"模型"，总要有一个给定的公理集 Γ_0 作为出发点(Γ_0 可以是空集).

可靠性定理 对任何非空类 M 和公式 φ，若 $\vdash\varphi$，则 $\vdash\varphi^M$.

这个逻辑定理在这里作为事实予以承认. 它的证明需要对形式语言的语法逐一作可靠性检查(参见通常谓词演算的可靠性定理的证明). 定理指出: 有效式在任何非空类中为真.

可靠性定理推论 若基于 Γ_0，M 是语句集 Γ 的模型, 且 $\Gamma\vdash\varphi$，则基于 Γ_0，φ 在 M 中为真(意为: 真语句集推出真语句).

证明 因 $\Gamma\vdash\varphi$，故存在 Γ 的有限个语句 $\varphi_1,\cdots,\varphi_n$ 使

$$\vdash\varphi_1\wedge\cdots\wedge\varphi_n \rightarrow \varphi.$$

由可靠性定理得

$$\vdash\varphi_1^M\wedge\cdots\wedge\varphi_n^M \rightarrow \varphi^M.$$

因 M 是 Γ 的模型(基于 Γ_0), 故有 $\Gamma_0\vdash\varphi_1^M\wedge\cdots\wedge\varphi_n^M$，进而有

$$\Gamma_0\vdash\varphi^M.$$

证 毕

由可靠性定理还可导出下面的引理, 这个引理是后面用来证明相对无矛盾性的重要工具.

引理 1 设有语句集 Γ_1，Γ_2，如果对于 Γ_2 中任何有限个语句 $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ 都存在类 M 使

$$\Gamma_1 \vdash \exists x M(x) \wedge \varphi_1^M \wedge \cdots \wedge \varphi_n^M,$$

即从 Γ_1 可证 Γ_2 的每一有限片断都有模型，那么当 Γ_1 无矛盾时 Γ_2 也无矛盾. 特别，若从 Γ_1 可证 Γ_2 存在着模型，则由 Γ_1 无矛盾导致 Γ_2 也无矛盾.

证明 (反证)设 $\Gamma_2 \vdash \psi \wedge \neg\psi$，这时有 $\varphi_1, \cdots, \varphi_n \in \Gamma_2$ 使

$$\vdash (\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n) \to (\psi \wedge \neg\psi). \tag{1}$$

由已知条件，从 Γ_1 可证 $\{\varphi_1, \cdots, \varphi_n\}$ 存在着模型 M：

$$\Gamma_1 \vdash \exists x M(x) \wedge \varphi_1^M \wedge \cdots \wedge \varphi_n^M. \tag{2}$$

对这个 M 和语句 $(\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n) \to (\psi \wedge \neg\psi)$ 应用可靠性定理(注意 (1))便得

$$\vdash (\varphi_1^M \wedge \cdots \wedge \varphi_n^M) \to (\psi^M \wedge \neg\psi^M).$$

由此及 (2) 得 $\Gamma_1 \vdash \psi^M \wedge \neg\psi^M$，这说明 Γ_1 是矛盾的.

证　毕

按定义 1，公式 φ^M 是把 φ 中所有 $\exists x$ 全部改为 $\exists x \in M$ 所得到的结果. 但这种规定是对由集论语言原来的字母表写出的公式实行的. 如果引进了新的符号，则要注意相应的变化，例如象以前那样用 $x \subset y$ 作为公式

$$\forall z(z \in x \to z \in y)$$

的缩写，那么

$$\begin{aligned}(x \subset y)^M &\leftrightarrow \forall z \in M(z \in x \to z \in y)\\ &\leftrightarrow x \cap M \subset y.\end{aligned} \tag{3}$$

关于引入函数词，5.1 节中已指出，若有

$$\forall x_1 \cdots x_n \exists! y \varphi(x_1, \cdots, x_n, y), \tag{4}$$

则可引入一个新 n 元函数词 f，且有新公理

$$\forall x_1 \cdots x_n\, y(y = f(x_1, \cdots, x_n) \leftrightarrow \varphi(x_1, \cdots, x_n, y)).$$

这时如何对含有 f 的公式 ψ 规定 ψ^M 呢? 首先，要使这种规定有意义，必须满足条件

$$(\forall x_1 \cdots x_n \exists!\, y\varphi(x_1, \cdots, x_n, y))^M,$$

即公式 (4) 在 M 中为真. 这时规定

$$(y = f(x_1, \cdots, x_n))^M \quad \leftrightarrow \quad \varphi^M(x_1, \cdots, x_n, y); \text{ 或}$$
$$y = f^M(x_1, \cdots, x_n) \quad \leftrightarrow \quad \varphi^M(x_1, \cdots, x_n, y).$$

就是说, 当 (4) 在 M 中为真时, 公式里的 $f^M(x_1, \cdots, x_n)$ 指 M 中使 $\varphi^M(x_1, \cdots, x_n, y)$ 成立的唯一的 y .

以零元函数词(常元) 0 为例. 若有

$$(\exists! y\, \forall x(x \notin y))^M \tag{5}$$

则有

$$(y = 0)^M \quad \leftrightarrow \quad (\forall x(x \notin y))^M \text{即} \forall x \in M(x \notin y),$$
$$(0 \in z)^M \quad \leftrightarrow \quad (\exists y(\forall x(x \notin y) \ \land \ y \in z))^M$$
$$\leftrightarrow \quad \exists y \in M(\forall x \in M(x \notin y) \ \land \ y \in z).$$

若取 $M = \{1, 2\}$, 则公式 (5) 在 M 中为真, 这时 $0^M = 1 \in M$.

若取 $M = \{0, 1, \{\{1\}\}\}$, 则公式 (5) 在 M 中为假, 因为 M 中的 0 和 $\{\{1\}\}$ 这两个元素都满足 $\forall x \in M(x \notin y)$, 故唯一性不成立. 这时 0^M 是 0 还是 $\{\{1\}\}$, 并不确定, 所以没有意义

下面更一般地讨论引入谓词和函数词的情形. 用 5.1 节中的符号, 设 $\mathcal{L}'$ 和 Γ' 是由 $\mathcal{L}$(即 $\{=, \in\}$) 和 Γ(已知的公理集)经有限次加入谓词和函数词扩张而成. 对新语言的语句 φ', 按 5.1 节逻辑定理中 (Ⅰ) , 存在原来语言的语句 φ 使得

$$\Gamma' \vdash \varphi' \leftrightarrow \varphi. \tag{6}$$

这时我们是否可用 φ^M 作为 φ'^M ? 问题在于, 若另有 ψ 使

$$\Gamma' \vdash \varphi' \leftrightarrow \psi. \tag{7}$$

φ^M 与 ψ^M 是否可证等价? 注意这时 (6) 与 (7) 导致

$$\Gamma' \vdash \varphi \leftrightarrow \psi.$$

由 5.1 节逻辑定理中 (Ⅱ) , 又有 $\Gamma \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$, 由此知存在 Γ 的有限条公理 $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ 使

$$\vdash \varphi_1 \land \cdots \land \varphi_n \ \rightarrow \ (\varphi \leftrightarrow \psi).$$

根据可靠性定理推论，当 M 是 $\{\varphi_1, \cdots, \varphi_n\}$ 的模型时，便有

$$\varphi^M \leftrightarrow \psi^M.$$

以后，我们将在这一点得到保证的情形下来处理 φ'^M，把 φ'^M 定义为 φ^M 或 ψ^M. 若取 Γ 为 ZF，则要求 M 是 ZF 的模型. 实际上，前面对 Γ 的讨论表明，只要求 M 是 ZF 的足够大的有限片断(即 ZF 的某个有限子集)的模型就可以了.

练 习 二 十

1. 证明: $(\forall x\varphi)^M \leftrightarrow \forall x \in M\varphi^M$.

5.3 公式的绝对性

在相对无矛盾性问题的讨论中，公式的绝对性是个很重要的概念.

定义 1 (公式的绝对性)

设类 $M \subset N$，公式 φ 中的自由变元至多是 $x_1, \cdots, x_n$. 若能(基于某个公理集 Γ_0)证明

$$\forall x_1 \cdots x_n \in M(\varphi^M(x_1, \cdots, x_n) \leftrightarrow \varphi^N(x_1, \cdots, x_n)),$$

则说 φ 对(M, N)是绝对的.

若 φ 对 (M, V) 是绝对的，则说 φ 对 M 是绝对的.

定义毕

由定义立即得:

(Ⅰ) 若 φ 对 M 是绝对的，则

$$\forall x_1 \cdots x_n \in M(\varphi^M(x_1, \cdots, x_n) \leftrightarrow \varphi(x_1, \cdots, x_n));$$

(Ⅱ) 若 φ 对 M 和 φ 对 N 都是绝对的，且 $M \subset N$，则 φ 对(M, N)是绝对的;

(Ⅲ) 若 φ 中无量词，则 φ 对任何 M 是绝对的，此时 φ^M

就是 φ. 命题连接词不影响绝对性.

例 1　公式 $x \subset y$(即 $\forall z(z \in x \rightarrow z \in y)$)并非对任何 M 都是绝对的. 如取 $M = \{0, \{\{0\}\}\}$, 则有

$$(\{\{0\}\} \subset 0)^M \text{ 成立, 但 } \{\{0\}\} \not\subset 0.$$

这说明"x 是 y 的子集"这件事的真假是因论域而异的. 但公式 $x \subset y$ 对任何可递类是绝对的. 事实上, 若 M 是可递类, 则当 $x \in M$ 时, $x \subset M$, 于是 $x \cap M = x$. 所以有

$$\forall x, y \in M,\ (x \subset y)^M \leftrightarrow x \cap M \subset y \qquad (\text{5.2 节 (3)})$$
$$\leftrightarrow x \subset y.$$

定义 2　(函数的绝对性)

设公式 $\forall x_1 \cdots x_n\ \exists! y \varphi(x_1, \cdots, x_n, y)$ 在 M, N 中皆为真, 且 $M \subset N$. 这时若公式 $\varphi(x_1, \cdots, x_n, y)$ 对 (M, N) 是绝对的, 则说由 φ 决定的函数 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 对 (M, N) 是绝对的 (N 是 V 时, 则说 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 对 M 是绝对的).

定义毕

由定义 1, 2, 当我们说 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 对 (M, N) 是绝对的, 意思是指

$$\forall x_1 \cdots x_n y \in M(\varphi^M(x_1, \cdots, x_n, y) \leftrightarrow \varphi^N(x_1, \cdots, x_n, y)) \text{ 或写成}$$
$$\forall x_1 \cdots x_n y \in M(y = f^M(x_1, \cdots, x_n) \leftrightarrow y = f^N(x_1, \cdots, x_n)).$$

后式也可写成

$$\forall x_1 \cdots x_n \in M\ f^M(x_1, \cdots, x_n) = f^N(x_1, \cdots, x_n).$$

命题 1　设 $M \subset N$, 且 M, N 都是语句集 Γ 的模型. 又设

$$\Gamma \vdash \forall x_1 \cdots x_n(\varphi(x_1, \cdots, x_n) \leftrightarrow \psi(x_1, \cdots, x_n)),$$

则 φ 和 ψ 对 (M, N) 同为绝对的或同为非绝对的.

证明　由绝对性的定义及 5.2 节可靠性定理的推论即得.

证　毕

后面在应用命题 1 时，用以证明 φ 和 ψ 等价的 Γ 常是由 ZF 或 ZF^- (不包括基础公理)的有限条公理组成.

命题 2 有界量词对可递类保持绝对性，即：若 $M \subset N$，这里 M, N 为可递类，且若 φ 对 (M, N) 是绝对的，则 $\exists x \in y\ (\varphi)$ 及 $\forall x \in y\ (\varphi)$ 对 (M, N) 都是绝对的.

证明 首先由 φ 的绝对性证明 $\exists x \in y\ (\varphi)$ 的绝对性.

设 x, y, z_1, $\cdots$, z_n 是 φ 中至多可能出现的自由变元. 对任何 y, z_1, $\cdots$, $z_n \in M$，我们有

$$\begin{aligned}(\exists x \in y(\varphi))^M &\leftrightarrow \exists x \in M(x \in y \wedge \varphi^M)\\ &\leftrightarrow \exists x(x \in y \wedge \varphi^M)\ (\text{由 } M \text{ 的可递性})\\ &\leftrightarrow \exists x(x \in y \wedge \varphi^N)\ (\varphi \text{ 对 } (M,N) \text{ 的绝对性})\\ &\leftrightarrow \exists x \in N(x \in y \wedge \varphi^N)\ (\text{由 } N \text{ 的可递性})\end{aligned}$$

最后的公式就是$(\exists x(x \in y \wedge \varphi))^N$ 或 $(\exists x \in y\ (\varphi))^N$.

至于 $\forall x \in y\ (\varphi)$，它等价于含有有界存在量词的公式 $\neg\exists x \in y(\neg\varphi)$，利用命题 1，由后者的绝对性得前者的绝对性.

证 毕

以后经常是对 $N = V$ 这一特殊情形来应用命题 1 与命题 2.

定理 1 (绝对公式与函数(一))

以下公式和函数对“ZF^- −无限公理”的任何可递模型 M 是绝对的.

1° $x \in y$	2° $x = y$	3° $x \subset y$
4° $\{x, y\}$, $\{x\}$	5° 0	6° $x \cup y$
7° $x \cap y$	8° $x - y$	9° x'(即 $x \cup \{x\}$)
10° x是可递集	11° $\bigcup x$	12° $\bigcap x$

证明 1° 与 2° 是无量词公式.

3° $x \subset y$ 的绝对性见例 1.

4° $\{x,y\}$ 引入的合理性是由无序对公理、内涵公理和外延公理保证的 (见 1.2 , 1.3 节). $\{x, y\}$ 和 $\{x\}$ 的绝对性由以下等价式利用命题 1 , 2 即可得到:

$z = \{x, y\} \leftrightarrow (x \in z \land y \in z \land \forall t \in z(t = x \lor t = y))$,

$z = \{x\} \leftrightarrow (x \in z \land \forall t \in z(t = x))$.

上式右边含有的量词是有界量词(后面的证明何时使用命题 1 , 2 不再一一说明).

利用命题 1 时, 取 Γ 为所需要的"ZF^- −无限公理"的有限子集. 以下各函数引入的合理性都是引入无限公理(2.3 节)之前所讨论过的.

5° $x = 0 \leftrightarrow \forall y \in x(y \notin x)$.

6° $z = x \cup y \leftrightarrow (\forall t \in z(t \in x \lor t \in y) \land x \subset z \land y \subset z)$.

9° $y = x' \leftrightarrow (\forall z \in y(z \in x \lor z = x) \land x \subset y \land x \in y)$.

10° x 是可递集 $\leftrightarrow (\forall y \in x \forall z \in y(z \in x))$.

11° $y = \cup x \leftrightarrow (\forall z \in y \exists t \in x(z \in t) \land \forall z \in x(z \subset y))$.

7°, 8°, 12° 的证明见练习二十一题 2 .

证 毕

以上绝对性的证明除用命题 1 时将命题中 Γ 取为 ZF^- 的适当的有限子集外, 所涉及符号引入的合理性也要求有 ZF^- 的相应公理, 但每一场合只需要有限条. 所以定理 1 中的 M 是"ZF^- −无限公理"的某个足够大的有限子集的可递模型就可以了.

在绝对性的讨论中, 经常涉及函数的复合.

设 n 元函数 f 和 n 个 m 元函数 $g_1, \cdots, g_n$ 对应的公式分别是 $\psi, \psi_1, \cdots, \psi_n$, 且以下公式在 M, N 中都为真:

$$(*) \quad \begin{array}{l} \forall x_1 \cdots x_n \exists! t \psi(x_1, \cdots, x_n, t), \\ \forall x_1 \cdots x_m \exists! t_i \psi_i(x_1, \cdots, x_m, t_i),\ i = 1, \cdots, n. \end{array}$$

则把

$$y = f(g_1(x_1, \cdots, x_m), \cdots, g_n(x_1, \cdots, x_m))$$

视为下面公式的缩写:

$$\exists t_1 \cdots t_n(\psi(t_1, \cdots, t_n, y) \wedge \psi_1(x_1, \cdots, x_m, t_1) \wedge \\ \wedge \cdots \wedge \psi_n(x_1, \cdots, x_m, t_n));$$

若另给公式 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$, 则把

$$\varphi(g_1(x_1, \cdots, x_m), \cdots, g_n(x_1, \cdots, x_m))$$

视为下面公式的缩写:

$$\exists t_1 \cdots t_n(\varphi(t_1, \cdots, t_n) \wedge \psi_1(x_1, \cdots, x_m, t_1) \wedge \\ \wedge \cdots \wedge \psi_n(x_1, \cdots, x_m, t_n)).$$

这两个缩写出现于下面的命题 3 中, 以后还要经常出现.

命题 3 函数的复合不改变绝对性. 具体说, 设 $M \subset N$, 且公式 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ 和函数 $f(x_1, \cdots, x_n)$, $g_1(x_1, \cdots, x_m)$, $\cdots$, $g_n(x_1, \cdots, x_m)$ 对 (M, N) 都是绝对的. 那么

$$\varphi(g_1(x_1, \cdots, x_m), \cdots, g_n(x_1, \cdots, x_m)) \text{ 与}$$
$$f(g_1(x_1, \cdots, x_m), \cdots, g_n(x_1, \cdots, x_m))$$

对 (M, N) 也都是绝对的.

证明 设相应于函数 f, $g_1, \cdots, g_n$ 的公式为 ψ, $\psi_1, \cdots, \psi_n$, 且 (*) 在 M 和 N 中都成立. 利用已知的 φ, ψ, $\psi_1, \cdots, \psi_n$ 的绝对性, 我们有:

$$\begin{aligned}
&\forall x_1, \cdots, x_m \in M, \\
&\varphi(g_1(x_1, \cdots, x_m), \cdots, g_n(x_1, \cdots, x_m))^M \leftrightarrow \\
&\leftrightarrow \exists t_1 \cdots t_n \in M(\varphi^M(t_1, \cdots, t_n) \wedge \\
&\quad \wedge \psi_1^M(x_1, \cdots, x_m, t_1) \wedge \cdots \wedge \psi_n^M(x_1, \cdots, x_m, t_n)) \\
&\leftrightarrow \exists t_1 \cdots t_n \in N(\varphi^N(t_1, \cdots, t_n) \wedge \\
&\quad \wedge \psi_1^N(x_1, \cdots, x_m, t_1) \wedge \cdots \wedge \psi_n^N(x_1, \cdots, x_m, t_n)) \\
&\leftrightarrow (\varphi(g_1(x_1, \cdots, x_m)), \cdots, g_n(x_1, \cdots, x_m)))^N,
\end{aligned}$$

上面第二步除了用到 φ, $\psi_1, \cdots, \psi_n$ 的绝对性, 一个方向的蕴涵式要注意 $t_1, \cdots, t_n$ 的唯一性(唯一性导致 $t_1, \cdots, t_n \in N \rightarrow t_1, \cdots, t_n \in M$);

$$\forall x_1, \cdots, x_m, y \in M,$$

$$(y=f(g_1(x_1,\cdots,x_m),\cdots,g_n(x_1,\cdots,x_m)))^M \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\exists t_1\cdots t_n(\psi(t_1,\cdots,t_n,y)\wedge$$
$$\wedge\psi_1(x_1,\cdots,x_m,t_1)\wedge\cdots\wedge\psi_n(x_1,\cdots,x_m,t_n)))^M$$
$$\leftrightarrow \exists t_1\cdots t_n\in M(\psi^M\wedge\psi_1^M\wedge\cdots\wedge\psi_n^M)$$
$$\leftrightarrow \exists t_1\cdots t_n\in N(\psi^N\wedge\psi_1^N\wedge\cdots\wedge\psi_n^N)$$
$$\leftrightarrow (y=f(g_1(x_1,\cdots,x_m),\cdots,g_n(x_1,\cdots,x_m)))^N.$$

证 毕

同样，命题 3 常用于 $N=\mathrm{V}$ 的特殊情形. 利用命题 3 可以得到更多的绝对性公式与函数.

定理 2 (绝对公式与函数(二))

以下公式与函数对"ZF^- – 无限公理"的任何可递模型 M 都是绝对的:

1° 有序对 (x,y)　2° x是有序对　3° $x\times y$
4° x是关系　5° $\mathrm{Dom}(x)$　6° $\mathrm{Ran}(x)$
7° f是函数　8° $f(x)$　9° f是单射
10° f是 x 到 y 的满射　11° f是 x 到 y 的双射.

证明 1° $(x,y)=f(g_1(x,y),g_2(x,y))$，其中

$$f(x_1,x_2)=g_2(x_1,x_2)=\{x_1,x_2\},\ g_1(x_1,x_2)=\{x_1\}.$$

f (即 g_2)与 g_1 的绝对性见定理 $1-4°$.

2° 注意函数 $\cup x$ 和公式 $\exists y\in u\,\exists z\in v(x=(y,z))$ 的绝对性以及等价式

$$x \text{ 是有序对} \leftrightarrow \exists y\in\cup x\,\exists z\in\cup x(x=(y,z)).$$

4° x 是关系 $\leftrightarrow \forall y\in x(y$ 是有序对$)$

5° $y=\mathrm{Dom}(x) \leftrightarrow \forall z\in y\exists t\in\cup\cup x((z,t)\in x)\wedge\forall z,t\in\cup\cup x((z,t)\in x\rightarrow z\in y)$.

7° f 是函数 $\leftrightarrow$ f 是关系 $\wedge\forall x,y,z\in\cup\cup f((x,y)\in f\wedge(x,z)\in f \rightarrow y=z)$.

8° $y=f(x) \leftrightarrow ((f$ 是函数 $\wedge(x,y)\in f)\vee$
$\vee((f$ 不是函数 $\vee(x,y)\notin f)\wedge y=0)$.

注意 $f(x)$ 应看成是两个变元 x, f 的函数, 故对任意集 x, f 都要求 $\exists! y\ y = f(x)$.

9° f 是单射 $\leftrightarrow$ (f 是函数 $\wedge \forall x, t \in \mathrm{Dom}(f)(f(x) = f(t) \rightarrow x = t)$).

3°, 6°, 10°, 11° 的证明留作练习(见练习二十一题 3).

证 毕

后面还会遇到不少公式与函数的绝对性要用类似的方法去建立. 同前面一样, 定理 2 中的 M 只要是"ZF−无限公理"的某个有限片断的可递模型就可以了.

练 习 二 十 一

1. 具体写出 5.3 节命题 1 的证明.
2. 证明定理 1 的 7°, 8°, 12°.
3. 证明定理 2 的 3°, 6°, 10°, 11°.

5.4 ZF 相对于 ZF⁻ 的无矛盾性

本节我们要证明, 若 ZF^-(不包含基础公理的 ZF)无矛盾, 则 ZF 也无矛盾.

先将 ZF 的公理更形式地写成语句(闭式), 全部列出如下:

(ZF1) **外延公理**

$$\forall x \forall y(\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y).$$

(ZF2) **内涵公理**

$$\forall s z_1 \cdots z_n \exists y \forall x(x \in y \leftrightarrow x \in s \wedge \varphi(x, s, z_1, \cdots, z_n)),$$

其中 $\varphi(x, s, z_1, \cdots, z_n)$ 是任一公式, 它的自由变元至多是 $x, s, z_1, \cdots, z_n$.

(ZF3) **无序对公理**

$$\forall x \forall y\, \exists z (x \in z \wedge y \in z).$$

(ZF4)　**并集公理**

$$\forall x\, \exists y \forall z \forall t (t \in z \ \wedge\ z \in x \ \rightarrow t \in y).$$

(ZF5)　**幂集公理**

$$\forall x\, \exists y \forall z (z \subset x \ \rightarrow \ z \in y).$$

(ZF6)　**无限公理**

$$\exists x (0 \in x \ \wedge\ \forall y \in x (y' \in x)).$$

(ZF7)　**替换公理**

$$\forall z t_1 \cdots t_n (\forall x \in z \exists! y \varphi \ \rightarrow\ \exists t \forall x \in z\, \exists y \in t \varphi),$$

其中 φ 是任一公式，它的自由变元至多是 x，y，z，t_1，$\cdots$，t_n.

(ZF8)　**基础公理**

$$\forall x (\exists y y \in x \ \rightarrow\ \exists y (y \in x \ \wedge\ \neg \exists z (z \in x \wedge z \in y))).$$

这里写出的基础公理 (ZF8) 是 V=WF 的等价形式(见 3.5 节命题 2).

ZF^- 由 (ZF1) — (ZF7) 组成. 本节中以下的论证都基于 ZF^-.

命题 1　　外延公理在任何可递类中为真.

证明　设 M 为可递类，即 $\forall x \in M (x \subset M)$. 由外延公理，对任意 x，$y \in M$，有

$$\forall z (z \in x \ \leftrightarrow\ z \in y) \ \rightarrow\ x = y.$$

当 $z \in x$ 或当 $z \in y$ 时总有 $z \in M$，于是

$$\forall z \in M (z \in x \ \leftrightarrow\ z \in y) \ \rightarrow\ \forall z (z \in x \ \leftrightarrow\ z \in y).$$

这就证明了

$$\forall x, y \in M (\forall z \in M (z \in x \ \leftrightarrow\ z \in y) \ \rightarrow\ x = y).$$

即外延公理在 M 中为真.

证　毕

命题 2　　若对任意 $x \in M$ 有 $\forall y (y \subset x \rightarrow y \in M)$，则内涵公理在 M 中为真.

证明 任取 $\varphi(x, s, z_1, \cdots, z_n)$，设 $s, z_1, \cdots, z_n \in M$. 由内涵公理，

$$\exists y \forall x(x \in y \leftrightarrow x \in s \wedge \varphi^M(x, s, z_1, \cdots, z_n)).$$

上式说明，式中断言存在的 y 是 s 的子集. 又已设 $s \in M$，故由已知条件得 $y \in M$. 这就证明了内涵公理在 M 中为真：

$$\exists y \in M \forall x \in M(x \in y \leftrightarrow x \in s \wedge \varphi^M(x, s, z_1, \cdots, z_n)).$$

证 毕

下面先来证明一个最简单的相对无矛盾性结果.

定理 1 若 ZF^- 无矛盾，则

外延公理+ 内涵公理+ $\forall x(x = 0)$

也无矛盾.

证明 取 $M = \{0\}$. $\{0\}$ 是可递集，故由命题 1 知外延公理在 M 中为真. 又由

$$y \subset 0 \rightarrow y = 0$$

知 M 满足命题 2 的条件，故内涵公理在 M 中为真. 公式 $\forall x(x = 0)$ 显然在 M 中为真. 以上基于 ZF^- 证明了 M 是

外延公理+ 内涵公理+ $\forall x(x = 0)$

的模型，最后再用 5.2 节引理 1 便可，在引理中取 Γ_1 为 ZF^-.

证 毕

命题 3 **基础公理在任何 $M \subset WF$ 中为真.**

证明 要证的是

$$\forall x \in M(\exists y \in M\ y \in x \rightarrow$$
$$\rightarrow \exists y \in M(y \in x \wedge \neg \exists z \in M(z \in x \wedge z \in y))).$$

设 $x \in M$，则 $x \in WF$ 且 $x \subset WF$(3.4 节命题 4 (Ⅰ)). 若 $\exists y \in M\ y \in x$，即 $M \cap x \neq 0$，这时取 $M \cap x$ 中具有最小秩的元素记为 y，则 y 就是所需要的 M 中的 $\in$ - 极小元(若另有 $z \in y$，由第 3.4 节命题 4(Ⅱ) 知 $\text{rank}(z) < \text{rank}(y)$).

证 毕

命题 4 **替换公理在 WF 中为真.**

证明 设φ为任一公式, φ的自由变元至多是x, y, z, t_1, $\cdots$, t_n. 再设z, t_1, $\cdots$, $t_n \in \mathrm{WF}$, 且假设$\forall x \in z \exists! y \in \mathrm{WF} \varphi^{\mathrm{WF}}$, 由此可写

$$\forall x \in z\, \exists! y (y \in \mathrm{WF} \wedge \varphi^{\mathrm{WF}}). \tag{1}$$

由 (1) 可使用替换公理得

$$\exists s \forall x \in z\, \exists y \in s (y \in \mathrm{WF} \wedge \varphi^{\mathrm{WF}}). \tag{2}$$

有了s, 又可使用内涵公理得到s的子集t, t的成员是s中具有性质

$$y \in \mathrm{WF} \ \wedge\ \exists x \in z\ \varphi^{\mathrm{WF}}$$

的所有y组成, 即

$$\exists t\ \forall y (y \in t \ \leftrightarrow\ y \in s \ \wedge\ y \in \mathrm{WF} \ \wedge\ \exists x \in z\ \varphi^{\mathrm{WF}}). \tag{3}$$

公式 (3) 说明$t \subset \mathrm{WF}$. 用 3.4 节命题 4 得$t \in \mathrm{WF}$.

任取$x \in z$. 由 (2) 知存在$y \in s$具有性质

$$y \in \mathrm{WF} \ \wedge\ \varphi^{\mathrm{WF}},$$

进而由 (3) 知$y \in t$. 这就证明了替换公理在 WF 中为真: 对任意z, t_1, $\cdots$, $t_n \in \mathrm{WF}$,

$$\forall x \in z\ \exists! y \in \mathrm{WF}\ \varphi^{\mathrm{WF}} \ \rightarrow\ \exists t \in \mathrm{WF}\ \forall x \in z\ \exists y \in t\ \varphi^{\mathrm{WF}}.$$

证 毕

现在可以证明基础公理对ZF^-的相对无矛盾性.

定理 2 若ZF^-无矛盾, 则 ZF 无矛盾.

证明 在 5.2 节引理 1 中取Γ_1为ZF^-, M为 WF. 我们由ZF^-出发来证明 WF 是 ZF 的模型, 从而得出结论. 注意 3.5 节以前所作的证明都与基础公理无关.

因 WF 是可递类(3.4 节命题 4), 故外延公理在 WF 中为真(命题 1).

当$x \in \mathrm{WF}$时, 若$y \subset x$, 则$y \subset \mathrm{WF}$且$y \in \mathrm{WF}$. 由命题 2 知内涵公理在 WF 中为真.

命题 3, 4 已得基础公理及替换公理在 WF 中为真.

当 $x \in \mathrm{WF}$ 时，$\mathcal{P}(x) \in \mathrm{WF}$（3.5 节命题 1），于是

$$\forall x \in \mathrm{WF}\ \exists y \in \mathrm{WF} \forall z (z \subset x \ \rightarrow \ z \in y).$$

$z \subset x$ 对 WF 是绝对的(因 WF 是可递类)，于是我们证明了幂集公理在 WF 中为真:

$$\forall x \in \mathrm{WF}\ \exists y \in \mathrm{WF} \forall z \in \mathrm{WF}((z \subset x)^{\mathrm{WF}} \ \rightarrow \ z \in y).$$

由 3.5 节命题 1 还知，当 x，$y \in \mathrm{WF}$ 时，$\{x, y\} \in \mathrm{WF}$ 且 $\cup x \in \mathrm{WF}$，于是

$$\forall x, y \in \mathrm{WF}\ \exists z \in \mathrm{WF}(x \in z \ \wedge \ y \in z),$$

$$\forall x \in \mathrm{WF}\ \exists y \in \mathrm{WF}\ \forall z\ \forall t (t \in z \ \wedge \ z \in x \ \rightarrow \ t \in y).$$

前式说明无序对公理在 WF 中为真; 后式说明并集公理在 WF 中为真.

至此我们已证 WF 是“ZF−无限公理”的模型. 最后剩下要验证无限公理在 WF 中为真.

由 3.4 节命题 3 知 $\omega \in \mathrm{WF}$. ω 具有性质(见 2.3 节):

$$0 \in \omega \ \wedge \ \forall y \in \omega (y' \in \omega).$$

由此得

$$\exists x \in \ \mathrm{WF}\ (0 \in x \ \wedge \ \forall y \in x\ (y' \in x)).$$

注意 5.3 节定理 1 的 5° 及 9°（0 与后继对 WF 是绝对的），便知无限公理在 WF 中为真.

证 毕

6 可构成集, 连续统假设的相对无矛盾性

6.1 良基似集关系上的超限归纳法

首先来讨论类上的良基关系和似集关系，它们是"$\in$"的推广.

3.4 节中讨论过集上的良基关系(见 3.4 节命题 5)，现在将良基关系推广到类. 注意类上的关系一般也是类.

设 R 是某个类上的二元关系，我们常把 $(x, y) \in R$ 写成 xRy.

定义 1 (类上的良基关系)

$R(\subset A \times A)$ 是类 A 上的良基关系，意指 A 的任一非空子集必有 R - 极小元，即

$$\forall x \subset A(x \neq 0 \rightarrow \exists y \in x \forall z \in x(\neg zRy)).$$

定义毕

按此定义，5.4 节中列出的基础公理(ZF8)可叙述为:

$\in$ 是 V 上的良基关系.

定义 2 (类上的似集关系)

如果对任一 $x \in A$,

$$\{y \in A \mid yRx\}$$

都是集，则把 $R(\subset A \times A)$ 叫做类 A 上的似集关系.

定义毕

作为特例，根据内涵公理，$\in$ 是任何类 A 上的似集关系.

由定义 2，

R 是 A 上似集关系 $\leftrightarrow \ \forall x \in A\, \exists t\, \forall y \in A(y \in t \ \leftrightarrow \ yRx)$.
换句话说，若 R 是 A 上的似集关系，则意味着对任一 $x \in A$，$\overset{<}{x}$ 都是集，且反之也对，这里 $\overset{<}{x}$ 是指

$$\overset{<}{x} = \{y \in A \mid yRx\}.$$

$\overset{<}{x}$ 由 A 中所有按关系 R 在 x 之前的元素组成，叫做 A 中以 x 为限的前段，或简称为 x 的前段.

定义 3 $(\mathrm{cl}(A,\ x,\ \in))$

设 R 是类 A 上的似集关系，且 $x \in A$. 规定

$$\mathrm{cl}(A,\ x,\ R) = \cup_{n\in\omega} p_n(x),$$

其中

$$p_0(x) = \overset{<}{x} = \{y \in A \mid yRx\},$$
$$p_{n+1}(x) = \cup\{\overset{<}{y} \mid y \in p_n(x)\}.$$

定义毕

当 x 是 A 的 R - 极小元时，$\overset{<}{x} = 0$，且 $\mathrm{cl}(A,\ x,\ R) = 0$.

作为特例，若 R 为"$\in$"，且 A 为可递类，则 $\overset{<}{x} = x$，于是 $\mathrm{cl}(A,\ x,\ \in)$ 就是 3.5 节定义 1 中的 $\mathrm{cl}(x)$ —— x 的可递闭包：

$$\mathrm{cl}(x) = \mathrm{cl}(A,\ x,\ \in) = \cup_{n\in\omega}(\cup^n(x))$$
$$= x \cup (\cup x) \cup (\cup^2 x) \cup \cdots$$

$\mathrm{cl}(x)$ 包含有：x 的元素，x 的元素的元素，x 的元素的元素的元素，…….

命题 1 若 R 是 A 上的似集关系，则

$$y \in \mathrm{cl}(A,\ x,\ R) \ \rightarrow \ \overset{<}{y} \ \subset \ \mathrm{cl}(A,\ x,\ R).$$

证明 设 $z \in \overset{<}{y}$，$y \in p_n(x)$. 这时有 $z \in p_{n+1}(x)$，$z \in \mathrm{cl}(A,\ x,\ R)$.

证 毕

命题 2 设 R 为 A 上似集关系. 若 yRx，则

$$\mathrm{cl}(A,\ y,\ R) \ \subset \ \mathrm{cl}(A,\ x,\ R).$$

证明 对 n 归纳证明每个 $p_n(y) \ \subset \ \mathrm{cl}(A,\ x,\ R)$.

$n = 0$ 时，用命题 1 即可(因 yRx，故 $y \in \overset{<}{x} = p_0(x)$).

假设$p_n(y) \subset \mathrm{cl}(A, x, R)$. 任取$t \in p_{n+1}(y)$, 有$s \in p_n(y)$, $t \in \overset{<}{s}$. 又由命题 1 知 $\overset{<}{s} \subset \mathrm{cl}(A, x, R)$, 故$t \in \mathrm{cl}(A, x, R)$.

证 毕

定理 1 **(超限归纳证明的一般形式)**

若 R 是 A 上的良基似集关系, 则 A 的每个非空子类有 R - 极小元.

证明 设 X 是 A 的非空子类. 如果 X 是 A 的非空子集, 那么根据定义 1, 已无须证明什么.

取 $x \in X$. 由 cl 的定义式知 $\mathrm{cl}(A, x, R)$ 是集. 若 x 不是 X 的 R - 极小元, 则 $X \cap \mathrm{cl}(A, x, R)$ 是 A 的非空子集, 它有 R - 极小元 y (由 R 的良基性). y 也必是 X 的 R - 极小元. 事实上, 若有 $z \in X$, zRy, 则 $z \in \overset{<}{y}$; 由命题 1, 有 $z \in \mathrm{cl}(A, x, R)$, 这与 y 的极小性矛盾.

证 毕

定理 1 指出了对于类上良基似集关系的超限归纳证明的合理性. 与以前一样, 在应用定理 1 时, 常采取这样的形式: 假设每当 yRx 时, 性质 φ 对 y 成立, 然后去证明性质 φ 对 x 也成立.

上面的定理 1 当 R 为"$\in$"且 $A = \mathrm{On}$ 时的特殊情形就是 3.2 节定理 1.

定理 2 **(超限归纳定义的一般形式)**

已知 R 是 A 上的良基似集关系, 且已知 $G: A \times \mathrm{V} \longrightarrow \mathrm{V}$, 则唯一存在函数 $F: A \longrightarrow \mathrm{V}$ 满足条件

$$\forall x \in A(F(x) = G(x, F\lceil \overset{<}{x})). \tag{1}$$

证明 (Ⅰ) F 的唯一性:

设 F, $\widetilde{F}$ 都具有性质 (1). 记

$$X = \{x \in A \mid F(x) \neq \widetilde{F}(x)\}.$$

若 $X \neq 0$, 则由定理 1 知必有 R - 极小元 x, $F(x) \neq \widetilde{F}(x)$. 由 x 的极小性及 (1) 即可导致矛盾.

(Ⅱ) F 的存在性:

设 $x \in A$. 记 $d_x = \{x\} \cup \mathrm{cl}(A, x, R)$, 则 d_x 具有性质

$$\forall t \in d_x \overset{<}{t} \subset d_x \quad (\text{注意 cl 的定义及命题 1})$$

我们先证明对每个 $x \in A$ 都存在以 d_x 为定义域的函数 f_x, 它具有性质:

$$\forall t \in d_x (f_x(t) = G(t, f_x \lceil \overset{<}{t})). \tag{2}$$

易知(类似于 (I) 的证明)这种 f_x 如果存在, 则还具有性质:

$$f_x \lceil (d_x \cap d_y) = f_y \lceil (d_x \cap d_y), (x, y \in A). \tag{3}$$

现对 $x \in A$ 归纳证明 f_x 的存在性.

假设 yRx 时, 存在以 $d_y = \{y\} \cap \mathrm{cl}(A, y, R)$ 为定义域且具有性质 (2) 的函数 f_y. 令

$$g = \cup\{f_y \mid yRx\}.$$

注意 (3), 可知 g 是以 $d = \cup\{d_y \mid yRx\}$ 为定义域且具有性质 (2) 的函数.

易知 $d = \mathrm{cl}(A, x, R)$. 事实上, 由命题 2 即得 $d \subset \mathrm{cl}(A, x, R)$; 至于 $\mathrm{cl}(A, x, R) \subset d$, 只用对 n 归纳证明每个 $p_n(x) \subset d$ 便可得(参见练习二十二题 4).

再作 $f_x = g \cup \{(x, G(x, g \lceil \overset{<}{x}))\}$, 则 f_x 是定义在

$$d_x = \{x\} \cup \mathrm{cl}(A, x, R)$$

上的函数, 且具有性质 (2).

最后定义所需要的 F 如下. 对任意 $x \in A$, 令

$$F(x) = f_x(x) = G(x, f_x \lceil \overset{<}{x}).$$

任取 $t \in \overset{<}{x}$. 注意 (3), 有 $f_t(t) = f_x(t)$, 于是 $F(t) = f_x(t)$. 这说明

$$F \lceil \overset{<}{x} = f_x \lceil \overset{<}{x}, \ F(x) = G(x, F \lceil \overset{<}{x}).$$

证 毕

定理 2 建立了归纳定义的合理性, 这种归纳定义具有很一般的形式, 它把以前的几种特殊形式的归纳定义都包括在内.

注意定理 2 的证明未用基础公理.

一般形式的超限归纳定义及其应用是个难点. 现通过下面的重要例题说明定理 2 的应用. 这个例题在后面建立力迫法时要用到.

例 1　承认基础公理, 则 $\in$ 是 V 上的良基关系. 这时可用"$\in$"来定义 V 上的另一关系 R:

$$yRx \quad \text{当且仅当} \quad y \in \mathrm{cl}(x).$$

x 的前段 $\overset{<}{x} = \{y \mid yRx\} = \{y \mid y \in \mathrm{cl}(x)\} = \mathrm{cl}(x)$, 这说明 R 是似集关系. R 还是良基关系. 为证此点, 任取 $b \neq 0$, 设 b 中具有最小秩的元素为 x. x 也是 b 的 R - 极小元. 事实上, 若 b 中另有 x_0Rx (即 $x_0 \in \mathrm{cl}(x)$), 则对 x_0 在 $\mathrm{cl}(x) = \bigcup_{n\in\omega} \bigcup^n x$ 中所在层次归纳易证 $\mathrm{rank}(x_0) < \mathrm{rank}(x)$(利用 3.4 节命题 4), 从而与 $\mathrm{rank}(x)$ 的最小性矛盾. 这就证明了 R 的良基性.

既然 R 是 V 上的良基似集关系, 利用定理 2 可归纳定义一个函数 $F: \mathrm{V} \longrightarrow \mathrm{V}$ 如下, 其中 a 是任一已知集:

$$F(x) = \begin{cases} 1 & \text{若 } x \text{ 是关系, 且对任意 } (y, z) \in x \text{ 有 } z \in a \\ & \quad \text{且 } F(y) = 1 \\ 0 & \text{其他情形} \end{cases}$$

F 的值依赖于 $F \lceil \overset{<}{x}$, 其中 $\overset{<}{x} = \mathrm{cl}(x)$. 注意 $(y, z) \in x$ 时, 有 $y \in \mathrm{cl}(x)$.

后面第七章中, 我们将利用这样归纳定义的函数 F 引进对力迫法十分重要的标号概念.

如取 $a = \{b\}$, 则有

$F(0) = 1,$

$F(\{(0, b)\}) = 1,$

$F(\{(\{(0, b)\}, b)\}) = 1,$

$F(\{(0, b), (\{(0, b)\}, b)\}) = 1,$

......

我们经常对有某种构造的可递类感兴趣. 如果遇到的是非可递的类, 我们往往去找该类的替身 —— 可递同构象, 这时可利用下面的定理.

定理 3 (Mostowski 叠形定理)

如果外延公理在类 A 中成立，即如果

$$\forall x, y \in A(\forall z \in A(z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y), \quad (4)$$

那么必唯一存在 A 到一可递类 M 的同构 F. F 是同构，指 F 是 A 到 M 的具有以下性质的双射:

$$\forall x, y \in A(x \in y \leftrightarrow F(x) \in F(y)). \quad (5)$$

证明 由基础公理，$\in$ 是 A 上的良基关系. 现归纳定义函数 $F: A \longrightarrow V$ 如下:

$$F(x) = \{F(y) \mid y \in A \cap x\}.$$

把 F 的值域记为 $M(M = \text{Ran}(F))$，则 F 是 A 到 M 的满射.

M 是可递的，这由 F 与 M 的定义立即可知.

为证 F 是单射，假设存在 $x, y \in A$, $x \neq y$, 但 $F(x) = F(y)$. 用 x 表示下面非空集的 $\in$ - 极小元:

$$\{x \in A \mid \exists y \in A \ (x \neq y \ \wedge \ F(x) = F(y))\}.$$

因 $x \neq y$，由 (4)，只有以下两种情形可能出现:

情形 1 存在 $z \in A \cap x$ 但 $z \notin y$. 这时 $F(z) \in F(x) = F(y)$，于是存在 $t \in A \cap y$ 使 $F(z) = F(t)$. 但因 $z \notin y$ 而 $t \in y$，故 $z \neq t$. z 的存在与 x 的极小性矛盾.

情形 2 存在 $z \in A \cap y$ 但 $z \notin x$，这时同样推出矛盾.

还要证 F 具有性质 (5)，从而是同构. 对任意 $x, y \in A$ 由 F 的定义立即知 $x \in y \rightarrow F(x) \in F(y)$; 再由 F 的单射性即得

$$\begin{aligned} F(x) \in F(y) &\rightarrow \exists t \in A \cap y \ F(x) = F(t) \\ &\rightarrow x = t \in y. \end{aligned}$$

M 与 F 的唯一性: 设另有 $\widetilde{M}$ 与 $\widetilde{F}$ 满足 (4) 与 (5). 因 $\in$ 是 A 上良基似集关系，对 $x \in A$ 归纳易证 $\widetilde{F}(x) = F(x)$，进而 $\widetilde{M} = M$.

证 毕

如果将定理 3 中类 A 的关系“$\in$”换成 A 上更一般的良基似集关系 R，将 (4) 换成一般的外延性条件:

$$\forall x, y \in A(\forall z \in A(zRx \leftrightarrow zRy) \rightarrow x = y),$$

将 (5) 改成

$$\forall x, y \in A(xRy \leftrightarrow F(x) \in F(y)),$$

那么定理 3 仍然成立, 证明完全类似. 同构 F 的定义式相应改为

$$F(x) = \{F(y) \mid y \in A \wedge yRx\}.$$

定义 4 (Mostowski 叠形)

定理 3 中的可递类 M(A 的同构象)叫做 A 的 Mostowski 叠形, 同构 F 叫做 Mostowski 叠形映射.

定义毕

后面在讨论可递模型时, Mostowski 叠形映射十分有用.

练 习 二 十 二

1. 利用 6.1 节定理 1 重新证明: 若每个非空集都有 $\in$ - 极小元, 则 V=WF (试与 3.5 节命题 2 比较).

2. 补证 6.1 定理 2 证明中的 (3) 式.

3. 对给定的集 a 定义 V 上的关系 R 如下:

$$yRx \leftrightarrow (y, a) \in x.$$

(I) 试证 R 是良基似集关系.

(II) 若用 R 与 $\in$ 分别归纳定义函数 $F: \mathrm{V} \longrightarrow \mathrm{V}$ 与 $G: \mathrm{V} \longrightarrow \mathrm{V}$ 使之满足

$$F(x) = \{F(y) \mid yRx\},$$

(F 叫做 (V, R) 的 Mostowski 叠形映射)

$$G(x) = \{(G(y), a) \mid y \in x\}.$$

试证恒有 $F(G(x)) = x$.

4. 设 R 是 A 上的良基似集关系, $x \in A$, $d = \cup\{d_y \mid yRx\}$, 其中 $d_y = \{y\} \cup \mathrm{cl}(A, y, R)$. 证明: $d = \mathrm{cl}(A, x, R)$.

6.2 再谈公式的绝对性

为了后面的需要，我们再建立一些关于绝对性的结果，特别是关于超限归纳定义保持绝对性的结果. 本节往下的工作都基于 ZF .

命题 1 设 M 是 ZF 的可递模型，则 M 的有限子集还在 M 中.

证明 设 a 是 M 的有限子集. 对 a 中元素个数 n 归纳证明 $a \in M$.

$n = 0$ 时，$a = 0 = 0^M \in M$(0 对可递模型的绝对性).

设 a 有 $n+1$ 个元素的，并设 $b \in a$. 由归纳假设，$a - \{b\} \in M$. M 是可递的，故 $b \in M$. 而 $a = \{b\} \cup (a - \{b\})$，故 $a \in M$(用到 5.3 节定理 1 - 4°，6°).

证 毕

定理 1 (绝对公式与函数(三))

以下公式和函数对 ZF 的任何可递模型 M 是绝对的:

1° x是序数	2° x是极限序数	3° x是后继序数
4° $x \in \omega$	5° ω	6° n(自然数)
7° x是有限集	8° x^n(即 ${}^n x$)	9° x是 y 的良序
10° y 的序型		

11° $\alpha - 1$($\alpha = \beta'$时 $\alpha - 1 = \beta$，否则规定 $\alpha - 1 = \alpha$).

证明 1° 按 2.2 节定义 2 ，序数是 $\in$ - 良序的可递集. 由于有了基础公理，$\in$ - 反自反性及 $\in$ - 良基性对任何集自然成立，故有

x是序数 $\leftrightarrow$ (x 是可递集 $\wedge$

$$\wedge \forall u, v, t \in x\, (u \in v \wedge v \in t \rightarrow u \in t) \wedge$$

$\wedge \forall u, v \in x\,(u \in v \vee v \in u \vee u = v))$.

2° x 是极限序数(利用 2.3 节命题 5)

$\leftrightarrow$ x 是序数 $\wedge\, x \neq 0 \wedge x = \cup x$.

3°, 4°, 5°, 11° 见练习二十三题 1 .

6° 对 n 归纳. 0 的绝对性见 5.3 节定理 1 - 5°.

设 n 是绝对的, 那么 n' 也是绝对的:

$$x = n' \leftrightarrow \exists y \in x\,(y = n \wedge x = y').$$

7° x 是有限集, 指公式 $\exists y\, \varphi(x, y)$, 其中 $\varphi(x, y)$ 是公式

$$y \text{ 是单射} \wedge \mathrm{Dom}(y) = x \wedge \mathrm{Ran}\,(y) \in \omega.$$

$\varphi(x, y)$ 的绝对性前面已经建立(由 5.3 节命题 3 及定理 2 - 9°, 5°, 6°). $\varphi(x, y)$ 的意思是: y 是 x 到某个自然数的双射. 要证明" x 是有限集"的绝对性, 只要证对任意 $x \in M$, 能在 M 中找到这个双射 y:

$$\exists y\, \varphi(x, y) \rightarrow \exists y \in M\, \varphi(x, y).$$

为此只用证 $\varphi(x, y) \rightarrow y \in M$. 现假设 $\varphi(x, y)$, 即 y 是 x 到某个自然数(设为 n)的双射. 于是 y 本身也是有限集, 其成员都是由 M 的元素组成的有序对(注意 $x, n \in M$), 这些有序对也都是 M 的成员(有序对的绝对性见 5.3 节定理 2 - 1°). 再利用命题 1 得 $y \in M$.

8° x^n 是作为一个二元函数 $f(x, n)$ 定义的:

$n \notin \omega$ 时, 令 $f(x, n) = 0$;

$n \in \omega$ 时, 令

$$f(x, n) = \{y \mid \varphi(x, n, y)\},$$

其中 $\varphi(x, n, y)$ 指公式

$$y \text{ 是函数} \wedge \mathrm{dom}(y) = n \wedge \mathrm{Ran}(y) \subset x.$$

此公式对 M 是绝对的. 于是

$$z = x^n(\text{即 } f(x, n)) \leftrightarrow (n \notin \omega \rightarrow z = 0) \wedge$$
$$\wedge (n \in \omega \rightarrow \forall y(y \in z \leftrightarrow \varphi(x, n, y))).$$

考虑已有的绝对性, 且因 $\forall y \in z\varphi(x, n, y)$(即 $\forall y(y \in z \rightarrow$

$\varphi(x, n, y)))$对 M 是绝对的，故只用证明对任意 $x, n, z \in M$，

$$\forall y \in M(\varphi(x, n, y) \to y \in z) \to \forall y(\varphi(x, n, y) \to y \in z),$$

为此只要证 $\varphi(x, n, y) \to y \in M$ 便可. 设 $\varphi(x, n, y)$ 成立，即 y 是 n 到 x 的函数. 因 $n, x \in M$，易知 y 是 M 的有限子集. 由命题 1 知 $y \in M$.

9°，10° 先证一个方向：

$$(x \text{ 是 } y \text{ 的良序}) \to (x \text{ 是 } y \text{ 的良序})^M.$$

首先，“ x 是 y 的全序”(可表达为下面的公式)对 M 是绝对的：

$$(\forall t \in y\ (t, t) \notin x) \wedge$$
$$\wedge\ (\forall u, v, t \in y(((u,v) \in x\ \wedge\ (v,t) \in x) \to (u,t) \in x)) \wedge$$
$$\wedge\ (\forall u, v \in y((u, v) \in x\ \vee\ (v, u) \in x\ \vee\ u = v)).$$

此外，设“ x 是 y 的良基关系”(即下式)为真：

$$\forall z(z \subset y\ \wedge\ z \neq 0 \to \exists u \in z\, \forall v \in z((v, u) \notin x)).$$

将 z 限制于 M 中，上式当然也为真.

再证另一个方向：

$$(x \text{ 是 } y \text{ 的良序})^M \to (x \text{ 是 } y \text{ 的良序}).$$

3.1 节定理 1 指出，每个良序集都与唯一的一个序数同构(这个序数即为该良序集的序型). 既然 M 是 ZF 的模型，且已知 $(x\text{是}y\text{的良序})^M$，故由 5.2 节可靠性定理推论知存在 $u, v \in M$ 使

$$(u \text{ 是序数} \wedge v \text{ 是 } y \text{ 到 } u \text{ 的同构})^M.$$

括号中的公式对 M 是绝对的(注意 1° 以及 5.3 节定理 2 - 8°，11°)，因为

$$v \text{ 是 } y \text{ 到 } u \text{ 的同构} \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (v \text{ 是 } y \text{ 到 } u \text{ 的双射} \wedge \forall s, t \in y((s, t) \in x \to$$
$$\to v(s) \in v(t))).$$

这就证明了在 V 中 v 也是 y 到序数 u 的同构，x 是 y 的良序，且 u 是 y 的序型，从而同时证明了序型的绝对性.

证 毕

简单说，在 ZF 的可递模型 M 内部用相对于 M 为绝对的函数或公式定义出的对象对 M 都是绝对的. 还可进一步得出结论：在 M 中由对 M 为绝对的对象用超限归纳法定义出的函数保持绝对性(见下面的定理 2 与推论 1).

下面再引进一个关于类的记号. 设有类 $A = \{x \mid A(x)\}$. 记

$$A^M = \{x \in M \mid (A(x))^M\} = \{x \in M \mid (x \in A)^M\}.$$

我们说 A 对 M 是绝对的，指公式 $A(x)$ 对 M 是绝对的，即

$$\forall x \in M(A(x) \leftrightarrow (A(x))^M),$$

(或 $\forall x \in M(x \in A \leftrightarrow (x \in A)^M)$)这意味着

$$A^M = A \cap M. \text{(当 } A \text{ 是集且 } A \in M \text{ 时，} A^M = A)$$

例如，对 ZF 的可递模型 M，有 $(\mathrm{On})^M = \mathrm{On} \cap M$，这是因为“$x$ 是序数”对 M 是绝对的，所以说类 On 对 M 是绝对的. ω 对 M 是绝对的，所以 $\omega^M = \omega$.

V 对任何 M 当然是绝对的，因公式 $x = x$ 是绝对的.

至于类函数，当我们写 $F: A \longrightarrow \mathrm{V}$ 时，意味着 F 具有性质

$$\forall x \in A \, \exists! y \, (x, y) \in F. \tag{1}$$

这时若说函数 F 对 M 是绝对的，则除了指 F 满足

$$\forall x, y \in M(((x, y) \in F)^M) \leftrightarrow (x, y) \in F),$$

还要求 (1) 在 M 中为真：

$$(\forall x \in A \, \exists! y(x, y) \in F)^M, \text{即}$$

$$\forall x \in A^M \, \exists! y \in M((x, y) \in F)^M.$$

命题 3 设 M 是 ZF 的可递模型，且 A 对 M 是绝对的，那么

$F: A \longrightarrow \mathrm{V}$ 对 M 是绝对的，当且仅当 $F^M = F \lceil A^M$.

证明 按约定，

$$F^M = \{(x, y) \in M \mid ((x, y) \in F)^M\},$$

$$F \cap M = \{(x, y) \in M \mid (x, y) \in F\}.$$

因 A 对 M 为绝对，故 $A^M = A \cap M$. 这时有

$$F\lceil A^M = \{(x, y) \in F \mid x \in A \cap M\}$$
$$= \{(x, y) \in F \mid x \in M\},$$

$F \cap M \subset F\lceil A^M$.　　(因 $(x, y) \in M \rightarrow x \in M$)

(Ⅰ) 若 $F^M = F\lceil A^M$, 则对任意 $x, y \in M$, 有

$$((x, y) \in F)^M \leftrightarrow (x, y) \in F;$$

且当 $x \in A^M$, $(x, y) \in F$ 时, 有 $(x, y) \in F^M$, 因而有 $(x, y) \in M$ 和 $y \in M$, 故由 (1) 得

$$\forall x \in A^M \exists ! y \in M((x, y) \in F)^M.$$

这说明函数 F 对 M 是绝对的.

(Ⅱ) 设 $F: A \longrightarrow V$ 对 M 是绝对的. 首先有

$$((x, y) \in F)^M \leftrightarrow (x, y) \in F,$$
$$F^M = F \cap M \subset F\lceil A^M.$$

考虑唯一性条件 $\forall x \in A^M \exists ! y \in M((x, y) \in F)$, 对任意 $(x, y) \in F\lceil A^M$, 必有 $y \in M$, $(x, y) \in M$, 从而 $(x, y) \in F \cap M$. 这说明

$$F\lceil A^M \subset F \cap M = F^M.$$

证　毕

下面讨论归纳定义出的函数的绝对性. 6.1 节定理 2 指出, 对 A 上的良基似集关系 R 及 $G: A \times V \longrightarrow V$, 唯一存在函数 $F: A \longrightarrow V$ 满足

(*)　　$\forall x \in A(F(x) = G(x, F\lceil \overset{<}{x}))$, $\overset{<}{x} = \{y \in A \mid yRx\}$.

定理 2　　设 M 是 ZF 的可递模型, $G: A \times V \longrightarrow V$ 对 M 是绝对的, 且 A 和 A 上的良基似集关系 R 具有性质:

(Ⅰ) A 和 R 对 M 是绝对的,

(Ⅱ) (R 是 A 上的似集关系 $)^M$,

(Ⅲ) $\forall x \in M(\overset{<}{x} \subset M)$,

那么由 A, R 及 G 归纳定义的具有性质 (*) 的函数 $F: A \longrightarrow V$ 对 M 是绝对的.

证明　已知 G、A, R 对 M 是绝对的, 故有

$A^M = A \cap M$, $R^M = R \cap M$, $G^M = G \cap M = G\lceil A^M \times M$.
R 是 A 上的良基关系，即

$$\forall z(z \subset A \ \wedge \ z \neq 0 \ \rightarrow \ \exists u \in z \, \forall v \in z \, ((v, \ u) \notin R)).$$

由此可得

$$\forall z \in M(z \subset A^M \ \wedge \ z \neq 0 \ \rightarrow \ \exists u \in z \, \forall v \in z \, ((v, \ u) \notin R^M)).$$

这说明在 M 内，R^M 是 A^M 上的良基关系，即 A^M 的任一非空子集必有 R^M - 极小元，进而 A^M 的任一非空子类必有 R^M- 极小元（6.1 节定理 1）.

已知 $(R\text{是}A\text{上的似集关系})^M$，故当 $x \in A^M$ 时，$\{y \in A^M \mid y \ R^M x\}$ 是集，可记为 $(\overset{<}{x})^M$. 易知 $(\overset{<}{x})^M = \overset{<}{x} \cap M$. 又因 $\overset{<}{x} \subset M$(已知条件 (Ⅲ))，故 $(\overset{<}{x})^M = \overset{<}{x}$. 用 A^M 上良基关系 R^M 连同 G^M : $A^M \times M \longrightarrow M$，可以在 M 内部按 6.1 节定理 2 (注意 M 是 ZF 的模型)归纳定义出函数 H : $A^M \longrightarrow M$，它具有性质 $\forall x \in A^M(H(x) = G^M(x, \ H\lceil \overset{<}{x}))$.

注意 F 所具有的性质 (*) 及 G 的绝对性条件，即可得 $F\lceil A^M = H$. 于是有 $F\lceil A^M = \{(x, \ y) \in M \mid (x, \ y) \in F\}$. 剩下证明

$$F\lceil A^M = F^M = \{(x, \ y) \in M \mid ((x, \ y) \in F)^M\},$$

进而由命题 3 便可得 F 的绝对性. 为此，只用证

$$\forall x \in A^M, \ (x, \ y) \in F \ \leftrightarrow \ ((x, \ y) \in F)^M.$$

令 $B = \{x \in A^M \mid (x, \ y) \in F \ \not\leftrightarrow \ ((x, \ y) \in F)^M\}$. 若 $B \neq 0$，则 B 有 R^M - 极小元，设为 x_0. 由 x_0 的极小性，当 $x \in \overset{<}{x}_0$ 时(此时 $xR^M x_0$)，

$$(x, \ y) \in F \ \leftrightarrow \ ((x, \ y) \in F)^M,$$

由此可得 $F\lceil \overset{<}{x}_0 = (F\lceil \overset{<}{x}_0)^M$ 及 $(x_0, \ y) \in F \ \leftrightarrow \ ((x_0, \ y) \in F)^M$，与 $x_0 \in B$ 矛盾.

证 毕

以定理 2 为工具可以得到一大批相对于 ZF 的可递模型 M 的绝对函数. 应用定理 2 时，常取 R 为 $\in$，取 A 为 On 或

V．这时定理 2 的条件 (Ⅰ)，(Ⅱ)，(Ⅲ) 都自动得到满足，且 $\overset{<}{x} = \{y \mid y \in x\} = x$. 于是有

推论 1　设 M 是 ZF 的可递模型，A 为 V 或 On，且 G：V $\longrightarrow$ V 对 M 是绝对的，那么由 G 归纳定义的满足下式的函数 F：$A \longrightarrow$ V 对 M 是绝对的：

$$F(x) = G(F\lceil x).$$

据此推论，使用绝对的公式与函数归纳定义出的 V 上或 On 上的函数是绝对的，例如 3.3 节中定义的序数的加、乘和指数运算；3.4 节命题 6 中的 rank(x)；3.5 节中的 cl(x) 等等对 ZF 的可递模型 M 都是绝对的.

现以序数的加法为例说明定理 2 的应用. 设 M 是 ZF 的可递模型. 3.3 节中序数加法的定义式是

$$\alpha + 0 = \alpha,$$

$$\alpha + \beta' = (\alpha + \beta)',$$

$$\alpha + \beta = \cup\{\alpha + \gamma \mid \gamma \in \beta\}, \text{ 当 } \beta \text{ 是极限序数时.}$$

若 α 不是序数，则令 $\alpha + \beta = 0$. 这是以任意集 α 为参数对 β 归纳定义的函数 F：On $\longrightarrow$ V. On 对 M 是绝对的；$\in$ 是良基似集关系，且对任何 M 是绝对的；归纳定义时所用的 G（见 3.3 节）涉及的运算对 M 都是绝对的. 根据定理 2，由这些绝对的对象归纳定义的函数 F 对 M 也是绝对的. 这时对任意 α，β，$y \in M$，有

$$(\langle\beta, y\rangle \in F)^M \leftrightarrow \langle\beta, y\rangle \in F, \text{ 即}$$

$$(\alpha + \beta = y)^M \leftrightarrow \alpha + \beta = y.$$

对前面所建立的关于绝对性的结果，我们作以下说明. 这些结果的建立，要求 M 是 ZF 的可递模型. 但实际上并不要求 M 是整个 ZF 的模型，而只要求 M 是 ZF 的某个有限片断(即 ZF 足够多的有限条公理)的模型就可以了. 证明绝对性，经常要用 5.3 节命题 1；为了证明 φ 和 ψ 等价，命题 1 中的 Γ 取为 ZF 的某个有限部分便可. 每当用公式 $\varphi(x_1, \cdots, x_n, y)$ 引进一个函数，要验证条件 $(\forall x_1 \cdots x_n \, \exists! y \, \varphi(x_1, \cdots, x_n, y))^M$. 而这只需要 M 是

ZF 的足够大的有限片断的模型(详见 5.2 节中引理 1 后的讨论). 在应用 5.3 节命题 2 与命题 3 证明绝对性时, 并不对 M 提更多要求. 最后注意归纳定义保持绝对性的定理(本节定理 2), 按定理要求对一个具体归纳过程所作的验证, 只需要 ZF 的有限条公理.

练 习 二 十 三

证明以下所列各项对 ZF 的可递模型 M 的绝对性:

1. 6.2 节定理 1 中的 3°, 4°, 5°, 11°.
2. $\{t+1 \mid t \in x\}$.
3. $\text{rank}(x)$(利用 3.4 节命题 6).

6.3 反身定理

本节中要基于 ZFC 来研究 ZFC 的模型, 更确切地说, 研究 ZFC 的有限片断的模型.

一个公式 φ 的组成部分若也是公式, 则叫做 φ 的子公式. 例如公式 ψ 是 $\neg\psi$, $\psi \wedge \chi$, $\exists x\psi$ 等等的子公式.

命题 1 设公式列 $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ 的每个公式的所有子公式也都出现在此列中, 且 $M \subset N$. 那么: $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ 对 (M, N) 皆为绝对, 当且仅当该列中形为 $\exists x\varphi_j(x, y_1, \cdots, y_m)$ 的公式(其自由变元至多是 $y_1, \cdots, y_m$)都满足

$$\forall y_1, \cdots, y_m \in M(\exists x \in N\varphi_j^N(x, y_1, \cdots, y_m) \to \to \exists x \in M\varphi_j^N(x, y_1, \cdots, y_m)). \tag{1}$$

证明 条件 (1) 的必要性:

任取 $y_1, \cdots, y_m \in M$, 并设

$\exists x \in N\varphi_j^N(x, y_1, \cdots, y_m)$ 即 $(\exists x\varphi_j(x, y_1, \cdots, y_m))^N$.

由已知的绝对性得

$(\exists x\varphi_j(x, y_1, \cdots, y_m))^M$ 即 $\exists x \in M\varphi_j^M(x, y_1, \cdots, y_m)$.
又因 φ_j 作为子公式也在列中，也具有绝对性，故有

$$\exists x \in M\varphi_j^N(x, y_1, \cdots, y_m).$$

条件 (1) 的充分性:

对 φ_i 的长度归纳. 首先，原子公式是绝对的. 若 φ_i 形为 $\neg\varphi_j$ 或 $\varphi_j \wedge \varphi_k$，则由 φ_j，φ_k 的绝对性可得 φ_i 的绝对性. 最后设 φ_i 为 $\exists x\varphi_j(x, y_1, \cdots, y_m)$，这时对任意 $y_1, \cdots, y_m \in M$，有

$$\varphi_i^M \text{ (即 } \exists x \in M\ \varphi_j^M) \leftrightarrow \exists x \in M\ \varphi_j^N.$$

(由归纳假设，φ_j 为绝对)

再由条件 (1) 得

$$\varphi_i^M \leftrightarrow \exists x \in N\ \varphi_j^N \text{ 即 } \varphi_i^N.$$

证　毕

定理 1　设 $T = \bigcup_{\alpha\in\mathrm{On}} t_\alpha$，其中 t_α 具有性质:

(Ⅰ)　$\alpha < \beta \rightarrow t_\alpha \subset t_\beta$，

(Ⅱ)　对极限序数 γ，$t_\gamma = \bigcup_{\alpha<\gamma} t_\alpha$，

则对任意公式 $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$，

$$\forall\alpha\ \exists\beta > \alpha\ (\varphi_1, \cdots, \varphi_n \text{ 对 } (t_\beta, T) \text{ 是绝对的}).$$

证明　扩大公式列 $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$(扩大后仍记作 $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$)，使列中每个公式的所有子公式仍在列中. 现对扩大的公式列 $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ 来找定理中所要找的 t_β. 为此要利用命题 1，在命题 1 中取 N 为 T，M 将取作要找的 t_β.

当 φ_i 形为 $\exists x\varphi_j(x, y_1, \cdots, y_m)$ 时，对 $y_1, \cdots, y_m \in T$，作 $G_i(y_1, \cdots, y_m)$ 如下. 若 $\neg\exists x \in T\ \varphi_j^T(x, y_1, \cdots, y_m)$，则令

$$G_i(y_1, \cdots, y_m) = 0,$$

若 $\exists x \in T\ \varphi_j^T(x, y_1, \cdots, y_m)$，则令

$$G_i(y_1, \cdots, y_m) = \exists x \in t_\alpha\ \varphi_j^T(x, y_1, \cdots, y_m) \text{ 的最小 } \alpha.$$

注意 $G_i(y_1, \cdots, y_m)$ 对所有 $y_1, \cdots, y_m$ 都是序数.

再对每个 φ_i 分别定义一个函数 $F_i: \mathrm{On} \longrightarrow \mathrm{On}$ 如下. 若

φ_i 不是以存在量词为开头的形式，则令 $F_i(\gamma)=0$; 若 φ_i 形为 $\exists x\ \varphi_j(x, y_1, \cdots, y_m)$，则令

$$F_i(\gamma)=\cup\{G_i(y_1, \cdots, y_m) \mid y_1, \cdots, y_m \in t_\gamma\}.$$

由 $F_i(\gamma)$ 的定义及 t_γ 的单调性(性质 (Ⅰ))即得 $F_i(\gamma)$ 的单调性:

$$\gamma<\beta \rightarrow F_i(\gamma) \leq F_i(\beta).$$

对任给的 α，令

$$\beta_0=\alpha,$$

$$\beta_{k+1}=\max\{\beta_k+1, F_1(\beta_k), \cdots, F_n(\beta_k)\},$$

$$\beta=\cup_{k\in\omega}\beta_k.$$

因 $\gamma \in \beta \rightarrow \gamma+1 \in \beta$，故 β 是极限序数. 显然 $\beta>\alpha$，且当 $\gamma<\beta$ 时，有某个 k 使 $\gamma<\beta_k$. 由 $F_i(\gamma)$ 的单调性及 β_k 的定义可得

$$F_i(\gamma) \leq F_i(\beta_k) \leq \beta_{k+1}<\beta, \ i=1, \cdots, n.$$

至此已证

$$\forall\alpha\exists\text{极限序数}\beta>\alpha\forall\gamma<\beta(F_i(\gamma)<\beta), \ i=1, \cdots, n. \quad (2)$$

现可断言 $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ 对 (t_β, T) 的绝对性，这只要验证命题 1 中的条件 (1) 此时成立: 每当 φ_i 形为 $\exists x\varphi_j$ 时，

$$\forall y_1, \cdots, y_m \in t_\beta(\exists x \in T\varphi_j^T(x, y_1, \cdots, y_m) \rightarrow \exists x \in t_\beta\ \varphi_j^T(x, y_1, \cdots, y_m)).$$

事实上，因 β 是极限序数，故当 $y_1, \cdots, y_m \in t_\beta$ 时存在 $\gamma<\beta$ 使 $y_1, \cdots, y_m \in t_\gamma$; 又由 (2) 知每个 $F_i(\gamma)<\beta$; 再由 $F_i(\gamma)$, G_i 的定义及性质 (Ⅰ) 立即得

$$\exists x \in T\varphi_j^T(x, y_1, \cdots, y_m) \rightarrow \exists x \in t_\beta\ \varphi_j^T(x, y_1, \cdots, y_m).$$

证 毕

定理 1 证明中的关键是寻找使命题 1 中对 M 的要求(条件 (1))得到满足的 t_β.

由定理 1 ,我们可得到一系列重要推论.

先回忆一下良基集的概念(详见 3.4 节). 按基础公理 (ZF8) ，所有集都是良基集:

$$V = WF = \cup_{\alpha\in On} v_\alpha,$$

其中

$v_0 = 0$

$v_{\alpha+1} = \mathcal{P}(v_\alpha)$

$v_\alpha = \cup_{\gamma<\alpha} v_\gamma$，若 α 是极限序数.

每个 v_α 都是 $\in$ - 可递集，且

$\gamma < \alpha \rightarrow v_\gamma \neq v_\alpha$ 但 $v_\gamma \subset v_\alpha$(见 3.4 节命题 1).

以下推论在应用定理 1 时取 T 为 V，取 t_α 为 v_α.

推论 1 (反身定理)

对任意公式 $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$,

$$ZF \vdash \forall\alpha\exists\beta > \alpha(\varphi_1, \cdots, \varphi_n \text{ 对 } v_\beta \text{ 是绝对的}).$$

证明 在定理 1 中取 T =V，注意 v_α 具有定理 1 对 t_α 所要求的性质 (Ⅰ)，(Ⅱ).

证 毕

推论 1 中的 φ_i 常取为 ZF 的公理. 推论 1 叫做"反身定理"，是因为它可让 ZF 对 ZF 自身的部分片断作出断言.

由推论 1 即得:

推论 2 对任意语句 $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$,

$$ZF \vdash \forall\alpha\exists\beta > \alpha((\varphi_1^{v_\beta} \leftrightarrow \varphi_1) \wedge \cdots \wedge (\varphi_n^{v_\beta} \leftrightarrow \varphi_n)).$$

由推论 2 即得:

推论 3 设 S 是 ZF 的扩张，$\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ 是 S 的公理(都是语句)，则

$$S \vdash \forall\alpha\exists\beta > \alpha(\varphi_1^{v_\beta} \wedge \cdots \wedge \varphi_n^{v_\beta}).$$

推论 3 指出: 基于公理集 $S(\supset ZF)$ 能证明 S 的任意有限片断都存在集模型 v_β.

推论 4 设 $S \supset ZF$，且 $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ 是 S 中任意公理. 若能从 $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ 证明 S 的所有公理，则 S 是矛盾的.

证明 设 β 是使 $S \vdash \varphi_1^{v_\beta} \wedge \cdots \wedge \varphi_n^{v_\beta}$ 的最小 β(由推论 3 知这种 β 总存在). 假如从 $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ 能证出 S 的全部

公理，那么 S 的全部公理在 v_β 中为真 (由 5.2 节可靠性定理推论). S 是 ZF 的扩张，故 v_β 是 ZF 的可递模型. 任取 $\alpha \in \mathrm{v}_\beta$. 由 $\mathrm{v}_\alpha = \{x \mid \mathrm{rank}(x) < \alpha\}$(3.4 节命题 2)，注意 $\mathrm{rank}(x)$ 对 v_β 的绝对性(参见 6.2 节推论 1 后的说明或练习二十三题 3)，当 $x \in \mathrm{v}_\beta$ 时，

$$\begin{aligned}(x \in \mathrm{v}_\alpha)^{\mathrm{v}_\beta} &\leftrightarrow (\mathrm{rank}(x) < \alpha)^{\mathrm{v}_\beta} \\ &\leftrightarrow \mathrm{rank}(x) < \alpha \\ &\leftrightarrow x \in \mathrm{v}_\alpha.\end{aligned}$$

于是有

$$\begin{aligned}\mathrm{v}_\alpha^{\mathrm{v}_\beta} &= \{x \in \mathrm{v}_\beta \mid (x \in \mathrm{v}_\alpha)^{\mathrm{v}_\beta}\} \quad \text{(见 6.2 节命题 3 前的规定)} \\ &= \{x \in \mathrm{v}_\beta \mid x \in \mathrm{v}_\alpha\} = \mathrm{v}_\alpha \cap \mathrm{v}_\beta.\end{aligned}$$

因 α 取自 v_β ，由 3.4 节命题 2 ，3 知 $\alpha = \mathrm{rank}(\alpha) < \beta$，于是 $\mathrm{v}_\alpha \subset \mathrm{v}_\beta$，由此可得 $\mathrm{v}_\alpha^{\mathrm{v}_\beta} = \mathrm{v}_\alpha$，即 v_α 对 v_β 是绝对的. 又由推论 3 可推得

$$S \vdash \exists\gamma(\varphi_1^{\mathrm{v}_\gamma} \wedge \cdots \wedge \varphi_n^{\mathrm{v}_\gamma}).$$

既然 S 的全部公理在 v_β 中为真，那么 $\exists\gamma(\varphi_1^{\mathrm{v}_\gamma} \wedge \cdots \wedge \varphi_n^{\mathrm{v}_\gamma})$ 也在 v_β 中为真: $\exists\gamma \in \mathrm{v}_\beta(\varphi_1^{\mathrm{v}_\gamma} \wedge \cdots \wedge \varphi_n^{\mathrm{v}_\gamma})$ (注意因 $\gamma \in \mathrm{v}_\beta$，故 $\gamma < \beta$，$\mathrm{v}_\gamma \subset \mathrm{v}_\beta$)，这与 β 的最小性矛盾.

证 毕

推论 4 说明 ZF (或 ZFC，或更大的扩张 S) 不是“有限可公理化的”: 不可能等价于自己的任一有限片断.

以上没有使用选择公理. 若基于 ZFC ，可进一步得到下面的结果.

定理 2 对任意公式 $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ 和任意类 T,

$$\forall x \subset T\, \exists y(x \subset y \subset T \wedge (\varphi_1, \cdots, \varphi_n \text{对 } (y,\ T) \text{ 为绝对}) \wedge \wedge |y| \le \max(\omega,\ |x|)).$$

证明 扩大 $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$，使每个公式的所有子公式仍在列中，并仍记为 $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$. 令 $t_\alpha = T \cap \mathrm{v}_\alpha$，于是 T 和 t_α 满足定

理 1 条件 (I), (II). 任取 $x \subset T$, 再取足够大的 α 使 $x \subset t_\alpha$. 这时应用定理 1 得到 $\beta > \alpha$, 使 $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ 对 (t_β, T) 为绝对. 下面来找所需要的 $y \subset t_\beta$.

用 R 表示 t_β 中的一种良序 (用了选择公理). 现对每个公式 $\varphi_i(x_1, \cdots, x_{m_i})$ 分别作函数 $H_i: t_\beta^{m_i} \longrightarrow t_\beta$ 如下. 若 φ_i 不是以存在量词开头的形式, 则令

$$H_i(x_1, \cdots, x_{m_i}) = t_\beta \text{ 的 } R\text{- 最小元}.$$

若 φ_i 形为 $\exists z \varphi_j(z, x_1, \cdots, x_{m_i})$, 则令

$$H_i(x_1, \cdots, x_{m_i}) = \begin{cases} \text{满足 } \varphi_j^{t_\beta}(z, x_1, \cdots, x_{m_i}) \text{ 的 } R\text{- 最小 } z, \\ \qquad \text{若 } \exists z \in t_\beta \varphi_j^{t_\beta}(z, x_1, \cdots, x_{m_i}) \\ t_\beta \text{的 } R\text{- 最小元}, \\ \qquad \text{若 } \neg\exists z \in t_\beta \varphi_j^{t_\beta}(z, x_1, \cdots, x_{m_i}) \end{cases}$$

当 φ_i 中无自由变元 (即 $m_i = 0$) 时, 把 H_i 取为 t_β 的某个元素.

设 x 在运算 $H_1, \cdots, H_n$ 之下的闭包为 y, 则 $|y| \leq \max(\omega, |x|)$ (见 4.6 节定理2), 且 y 具有性质: 每当 φ_i 形为 $\exists z \varphi_j(z, x_1, \cdots, x_{m_i})$ 时, 便有

$$\forall x_1, \cdots, x_{m_i} \in y(\exists z \in t_\beta\ \varphi_j^{t_\beta}(z, x_1, \cdots, x_{m_i}) \rightarrow$$
$$\rightarrow \exists z \in y\ \varphi_j^{t_\beta}(z, x_1, \cdots, x_{m_i})),$$

由命题 1 便知 $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ 对 (y, t_β) 是绝对的, 从而对 (y, T) 是绝对的.

证 毕

定理 2 中基于选择公理引进的函数 H_i 叫做 Skolem 函数, 常被用来消去量词.

由定理 2 可以得到 ZFC 的任何有限片断的可数集模型, 但一般得到的不一定是可递的模型, 这时可以利用 Mostowski 叠形映射 (参见 6.1 节定理 3) 来寻找与之同构的可递模型.

A 与 B 同构, 指存在着 A 到 B 的双射 F, 满足:

$$\forall x, y \in A(x \in y \leftrightarrow F(x) \in F(y)).$$

命题2 若 F 是 A 到 B 的同构，则对任何公式 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$，当 $x_1, \cdots, x_n \in A$，$y_1, \cdots, y_n \in B$，且 $y_1 = F(x_1)$，$\cdots, y_n = F(x_n)$ 时，有

$$\varphi(x_1, \cdots, x_n)^A \leftrightarrow \varphi(y_1, \cdots, y_n)^B.$$

特别对于语句 φ，有 $\varphi^A \leftrightarrow \varphi^B$.

证明 对公式 φ 的长度归纳.

当 φ 是原子公式 $(x_1 = x_2,\ x_1 \in x_2)$ 或当 φ 形为 $\neg\psi$，$\psi \wedge \chi$ 时，结论显然正确. 当 φ 形为 $\exists x \psi(x, x_1, \cdots, x_n)$ 时，设 $x_1, \cdots, x_n \in A$，$y_1, \cdots, y_n \in B$ 且 $y_1 = F(x_1), \cdots, y_n = F(x_n)$. 因

$$\forall x \in A\ \exists y \in B\ y = F(x),\ \forall y \in B\ \exists x \in A\ y = F(x),$$

这时对 ψ 用归纳假设便可得

$$\exists x \in A\ \psi^A(x, x_1, \cdots, x_n) \leftrightarrow \exists y \in B\ \psi^B(y, y_1, \cdots, y_n).$$

证 毕

定理 3 对任何语句列 $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ 及可递类 T，有

$$\forall x \subset T\ (x \text{ 可递} \rightarrow \exists z(x \subset z \wedge z \text{ 可递} \wedge$$
$$\wedge (\varphi_1^z \leftrightarrow \varphi_1^T) \wedge \cdots \wedge (\varphi_n^z \leftrightarrow \varphi_n^T) \wedge$$
$$\wedge |z| \leq \max(\omega, |x|)).$$

证明 把外延公理加入 $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ 中作为 φ_n. 先取定理 2 所断言存在的集 $y \supset x$，具有性质：

$$\varphi_i^y \leftrightarrow \varphi_i^T \text{ 且 } |y| \leq \max(\omega, |x|).$$

T 是可递类，故外延公理在 T 中为真（5.4 节命题 1），从而也在 y 中为真：φ_n^y. 由 6.1 节定理 3 可知，存在可递集 z（Mostowski 叠形）以及 y 到 z 的同构 f（Mostowski 叠形映射）：

$$f(u) = \{f(v) \mid v \in y \cap u\}.\ (\text{见 6.1 节定理 3 的证明})$$
$$z = \mathrm{Ran}(f),\ |z| = |y| \leq \max(\omega, |x|).$$

任取 $u \in x \subset y$. 因 x 是可递集，故若 $v \in u$，则 $v \in y$，$y \cap u = u$. 于是有 $f(u) = \{f(v) \mid v \in u\} = u$，后面等式成立的理由是

$$\forall v \in u(f(v) = v \rightarrow f(u) = u).$$

现已得 $u \in z$, 这说明 $x \subset z$. 又由命题 2 知 $\varphi_i^y \leftrightarrow \varphi_i^z$, 故 $\varphi_i^z \leftrightarrow \varphi_i^T$.

证 毕

推论 5 设 S 是 ZFC 的任一扩张, 且 $\varphi_1, \cdots, \varphi_n \in S$, 则

$$S \vdash \exists z(|z| = \omega \wedge z \text{ 是可递集} \wedge \varphi_1^z \wedge \cdots \wedge \varphi_n^z).$$

证明 在定理 3 中取 T 为 V, 取 x 为 ω 便可.

证 毕

推论 5 是说: 基于任何把 ZFC 包括在内的公理集 S, 可以证明 S 本身的任何有限片断存在着可数的可递集模型. 特别, 从 ZFC 出发可证 ZFC 的任何有限片断存在着可数的可递集模型.

现取 ZFC 的一个足够大的有限片断的可数可递集模型 z, 使有关的绝对性得以保证. 按 6.2 节的规定

$$\begin{aligned}(\mathcal{P}(x))^z &= \{y \in z \mid (y \subset x)^z\} \\ &= \{y \in z \mid y \subset x\} \\ &= \mathcal{P}(x) \cap z.\end{aligned}$$

上式说明 $(\mathcal{P}(\omega))^z$ 是可数集. 但站在 z 中来看, $(\mathcal{P}(\omega))^z$ 是不可数的, 因为基于足够大的 ZFC 片断可证在 z 内部不存在 ω 到 $(\mathcal{P}(\omega))^z$ 的双射. 这就是有名的“Skolem 悖论”. 这个事实只不过说明了“可数性”不是绝对的. 后面还会遇见由基数的相对性而产生的类似的怪事.

6.4 可定义关系

在本节中我们设法把“可定义”一词用集论语言形式化、精确化. 从本节开始到本章结束的工作立足于 ZF.

映射 $s: n \longrightarrow a$ 是由 a 的 n 个元素组成的有限序列，常说成是有序 n 元组，记作 $s(0), \cdots, s(n-1)$，或 $(a_0, \cdots, a_{n-1})$，$a_i = s(i)$.

a^n 的子集由一些有序 n 元组构成，叫做 a 上的 n 元关系.

先引入集 a 上如下几种 n 元关系. 当 $i, j < n \in \omega$ 时，令

$$\mathrm{D}_\in(a, n, i, j) = \{(a_0, \cdots, a_{n-1}) \in a^n \mid a_i \in a_j\},$$

$$\mathrm{D}_=(a, n, i, j) = \{(a_0, \cdots, a_{n-1}) \in a^n \mid a_i = a_j\}.$$

若 $i, j < n \in \omega$ 不满足，则规定

$$\mathrm{D}_\in(a, n, i, j) = D_=(a, n, i, j) = 0$$

若 $n \in \omega$ 且 $n > 0$，则令

$$\mathrm{P}_\exists(a, n, r) = \{(a_0, \cdots, a_{n-1}) \in a^n \mid \mid \exists x((a_0, \cdots, a_{n-1}, x) \in r)\}.$$

若 $n \notin \omega$ 或 $n = 0$，则令

$$\mathcal{P}_\exists(a, n, r) = 0.$$

现对 k 归纳定义 $\mathrm{D}(k, a, n)$:

$$\mathrm{D}(0, a, n) = \{\mathrm{D}_\in(a, n, i, j) \mid i, j < n\} \cup \cup \{D_=(a, n, i, j) \mid i, j < n\}$$

$$\mathrm{D}(k+1, a, n) = \mathrm{D}(k, a, n) \cup \{a^n - r \mid r \in \mathrm{D}(k, a, n)\} \cup \cup \{r \cap t \mid r, t \in \mathrm{D}(k, a, n)\} \cup \cup \{\mathrm{P}_\exists(a, n, r) \mid r \in \mathrm{D}(k, a, n+1)\}.$$

$\mathrm{D}(k, a, n)$ 的每个成员都是 a 的 n 元关系. $\mathrm{D}(k, a, 1)$ 的成员则是 a 的特殊子集(即 1 元关系). 例如:

$\mathrm{D}(0, 0, 1) = 1$

$(\mathrm{D}_\in(0, 1, 0, 0) = 0,\ \mathrm{D}_=(0, 1, 0, 0) = 0)$

$\mathrm{D}(0, 1, 1) = 2$

$(\mathrm{D}_\in(1, 1, 0, 0) = 0,\ \mathrm{D}_=(1, 1, 0, 0) = \{0\} = 1)$

$\mathrm{D}(0, 2, 1) = \{0, 2\}$

$(\mathrm{D}_\in(2, 1, 0, 0) = 0,\ \mathrm{D}_=(2, 1, 0, 0) = \{0, 1\} = 2)$

$\mathrm{D}(0, 1, 2) = \{0, \{(0, 0)\}\}$

$$(D_{\in}(1, 2, 0, 0) = D_{\in}(1, 2, 0, 1) = \cdots = 0,$$
$$D_{=}(1, 2, 0, 0) = D_{=}(1, 2, 0, 1) = \cdots = \{(0, 0)\})$$
$$D(0, 2, 2) = \{0, \{(0, 1)\}, \{(1, 0)\}, \{(0, 0), (1, 1)\}, 2^2\}$$

……

定义 1 (可定义关系)

集 a 上的 n 元可定义关系，指下面用 $\mathrm{Df}(a, n)$ 表示的集的元素：

$$\mathrm{Df}(a, n) = \cup_{k\in\omega} D(k, a, n).$$

定义毕

由定义 1 立即可知：若 $r, t \in \mathrm{Df}(a, n)$，则 $a^n - r \in \mathrm{Df}(a, n)$，$r \cap t \in \mathrm{Df}(a, n)$；若 $r \in \mathrm{Df}(a, n+1)$，则 $P_{\exists}(a, n, r) \in \mathrm{Df}(a, n)$.

命题 1 对任何公式 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ 和任何集 x，都有

$$\{(x_1, \cdots, x_n) \in x^n \mid \varphi^x(x_1, \cdots, x_n)\} \in \mathrm{Df}(x, n),$$

其中 $\varphi^x(x_1, \cdots, x_n)$ 是 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ 对 x 的相对式，φ 中的自由变元至多是 $x_1, \cdots, x_n$.

证明 对 φ 的长度归纳.

(Ⅰ) 当 φ 是 $x_i \in x_j$ 或 $x_i = x_j$ $(i-1, j-1 < n)$ 时，

$$\{(x_1, \cdots, x_n) \in x^n \mid x_i \in x_j\}$$
$$= D_{\in}(x, n, i-1, j-1) \in \mathrm{Df}(x, n),$$
$$\{(x_1, \cdots, x_n) \in x^n \mid x_i = x_j\}$$
$$= D_{=}(x, n, i-1, j-1) \in \mathrm{Df}(x, n).$$

(Ⅱ) 当 φ 形为 $\neg\psi$ 或 $\psi \wedge \chi$ 时，假设

$$r = \{(x_1, \cdots, x_n) \in x^n \mid \psi^x(x_1, \cdots, x_n)\} \in \mathrm{Df}(x, n),$$
$$t = \{(x_1, \cdots, x_n) \in x^n \mid \chi^x(x_1, \cdots, x_n)\} \in \mathrm{Df}(x, n),$$

此时有

$$\{(x_1, \cdots, x_n) \in x^n \mid (\neg\psi(x_1, \cdots, x_n))^x\}$$
$$= x^n - r \in \mathrm{Df}(x, n),$$
$$\{(x_1, \cdots, x_n) \in x^n \mid \psi^x(x_1, \cdots, x_n) \wedge \chi^x(x_1, \cdots, x_n)\}$$
$$= r \cap t \in \mathrm{Df}(x, n).$$

(Ⅲ) 当 φ 形为 $\exists y\psi(x_1, \cdots, x_n, y)$ 时，假设

$$r = \{(x_1, \cdots, x_n, y) \in x^{n+1} \mid \psi^x(x_1, \cdots, x_n, y)\} \in \mathrm{D}(x, n+1),$$

此时有

$$\begin{aligned}
&\{(x_1, \cdots, x_n) \in x^n \mid \varphi^x(x_1, \cdots, x_n)\} \\
&\quad = \{(x_1, \cdots, x_n) \in x^n \mid \exists y \in x\psi^x(x_1, \cdots, x_n, y)\} \\
&\quad = \{(x_1, \cdots, x_n) \in x^n \mid \exists y((x_1, \cdots, x_n, y) \in r)\} \\
&\quad = \mathrm{P}_\exists(x, n, r) \in \mathrm{Df}(a, n).
\end{aligned}$$

证　毕

命题 1 意思是：$\mathrm{Df}(x, n)$ 包括了所有能用相对于 x 的公式定义的 x 上的 n 元关系. 这正是“可定义关系”名称的由来.

$\mathrm{Df}(a, n)$ 具有可数性，我们可以给出 $\mathrm{Df}(a, n)$ 的一个枚举.

定义 2　（可定义关系的枚举函数）

可定义关系的枚举函数 $\mathrm{E}(a, n, m)$ 指

$$\mathrm{E}(a, n, m) = \begin{cases} \mathrm{D}_\in(a, n, i, j), & m = 2^i3^j,\ i, j < n \\ \mathrm{D}_=(a, n, i, j), & m = 2^i3^j5,\ i, j < n \\ a^n - \mathrm{E}(a, n, i), & m = 2^i3^j5^2 \\ \mathrm{E}(a, n, i) \cap \mathrm{E}(a, n, j), & m = 2^i3^j5^3 \\ \mathrm{P}_\exists(a, n, \mathrm{E}(a, n+1, i)), & m = 2^i3^j5^4 \\ 0, & \text{其他情形} \end{cases}$$

定义毕

命题 2　$\mathrm{Df}(a, n) = \{\mathrm{E}(a, n, m) \mid m \in \omega\}$.

证明　因 $\mathrm{D}_\in(a, n, 0, 0) = 0$，故 $0 \in \mathrm{Df}(a, n)$. 由 Df 及 E 的定义，对 m 归纳即得 $\mathrm{E}(a, n, m) \in \mathrm{Df}(a, n)$，再对 k 归纳易得

$$\mathrm{D}(k, a, n) \subset \{\mathrm{E}(a, n, m) \mid m \in \omega\}.$$

证　毕

例如对给定的集 a，令 $n = 2$，便有 a 上二元可定义关系的如下枚举：

$E(a, 2, 0) = 0$

$E(a, 2, 1) = D_\in(a, 2, 0, 0)$

$E(a, 2, 2) = D_\in(a, 2, 1, 0)$

$E(a, 2, 3) = D_\in(a, 2, 0, 1)$

$E(a, 2, 4) = 0$

$E(a, 2, 5) = D_=(a, 2, 0, 0)$

$E(a, 2, 6) = D_\in(a, 2, 1, 1)$

......

命题 3 $|\mathrm{Df}(a, n)| \leq \omega$.

证明 任取 $x \in \mathrm{Df}(a, n)$，令

$$f(x) = \min\{m \in \omega \mid E(a, n, m) = x\},$$

则 $f: \mathrm{Df}(a, n) \longrightarrow \omega$ 是单射.

证 毕

命题 4 $\mathrm{Df}(x, n)$ 和 $E(x, n, m)$ 对 ZF 的可递模型是绝对的.

证明 设 M 是 ZF 的可递模型. $D_\in(x, n, i, j)$ 对 M 是绝对的. 事实上, $\forall z, x, n, i, j \in M$,

$$\begin{aligned}
& z = D_\in(x, n, i, j) \\
& \quad \leftrightarrow ((n \in \omega \wedge i < n \wedge j < n) \rightarrow \\
& \qquad \rightarrow (\forall y \in z(y \in x^n \wedge y(i) \in y(j)) \wedge \\
& \qquad \wedge \forall y \in x^n(y(i) \in y(j) \rightarrow y \in z))) \wedge \\
& \qquad \wedge (\neg(n \in \omega \wedge i < n \wedge j < n) \rightarrow z = 0).
\end{aligned}$$

说明 $D_\in(x, n, i, j)$ 的绝对性, 要用到 5.3 节的结论及 6.2 节定理 1. 类似可得 $D_=(x, n, i, j)$ 和 $P_\exists(x, n, r)$ 的绝对性. 由 $D(k, x, n)$ 的绝对性可得 $\mathrm{Df}(x, n)$ 的绝对性, 而 $D(k, x, n)$ 和 $E(x, n, m)$ 的绝对性的证明还要用到超限归纳定义保持绝对性定理(6.2 节推论 1).

证 毕

练习二十四

1. 具体写出

$D_\in(2, 3, 0, 1)$, $D_=(2, 3, 0, 1)$, $P_\exists(2, 2, D_\in(2, 3, 0, 1))$ 及 $P_\exists(2, 2, D_=(2, 3, 0, 1))$.

2. $D(0, 2, 3)$ 与 $D(1, 2, 2)$ 各有多少元素?

3. 设 $r, t \in \mathrm{Df}(a, n)$, 证明 $r \cup t \in \mathrm{Df}(a, n)$.

4. 证明 $P_\exists(x, n, r)$ 的绝对性.

6.5 可构成集

设 $s = (a_0, \cdots, a_{n-1})$, 用记号 $s''t$ 表示 $(a_0, \cdots, a_{n-1}, t)$.

定义 1 (可定义幂集算子 $\mathcal{D}$)

$$\mathcal{D}(a) = \{x \subset a \mid \exists n \in \omega \exists s \in a^n \\ \exists r \in \mathrm{Df}(a, n+1)(x = \{y \in a \mid s''y \in r\})\}.$$

定义毕

由定义知 $\mathcal{D}(a) \subset \mathcal{P}(a)$. 下面的命题指出了算子 $\mathcal{D}$ 的含义: $\mathcal{D}(a)$ 包括了所有用相对于 a 的公式定义的 a 的子集.

命题 1 任给集 a 及公式 $\varphi(x_1, \cdots, x_n, y)$, 有

$$\forall x_1 \cdots x_n \in a(\{y \in a \mid \varphi^a(x_1, \cdots, x_n, y)\} \in \mathcal{D}(a)).$$

证明 对任意 $x_1, \cdots, x_n \in a$, 取

$$r = \{(x_1, \cdots, x_n, y) \in a^{n+1} \mid \varphi^a(x_1, \cdots, x_n, y)\}.$$

由 6.4 节命题 1 知 $r \in \mathrm{Df}(a, n+1)$, 于是有

$$\{y \in a \mid \varphi^a(x_1, \cdots, x_n, y)\} \\ = \{y \in a \mid (x_1, \cdots, x_n, y) \in r\} \in \mathcal{D}(a).$$

证 毕

命题 2 (Ⅰ) 可递集 $a \subset \mathcal{D}(a)$.

(Ⅱ) $\forall x \subset a\ (|x| < \omega \rightarrow x \in \mathcal{D}(a))$.

证明 (Ⅰ) 在命题 1 中取公式 $\varphi(x, y)$ 为 $x \in y$, 则

$$\forall x \in a(\{y \in a \mid y \in x\} \in \mathcal{D}(a)). \tag{1}$$

若 a 为可递集，则当 $x \in a$ 时，$\{y \in a \mid y \in x\} = \{y \mid y \in x\} = x$. 于是 (1) 变为

$$\forall x \in a(x \in \mathcal{D}(a)), \text{ 即 } a \subset \mathcal{D}(a).$$

(Ⅱ) 任取 r, $s \in \mathrm{Df}(a, n+1)$，则

$$r \cup s = a^{n+1} - ((a^{n+1} - r) \cap (a^{n+1} - s)) \in Df(a, n+1), \tag{2}$$

$$0 = r \cap (a^{n+1} - r) \in Df(a, n+1). \tag{3}$$

固定 n，令

$r_k = \{t \in a^{n+1} \mid \exists i < k(t(n) = t(i))\}$, $k = 0, 1, \cdots, n$.

现对 k 归纳证明当 $k \le n$ 时，$r_k \in \mathrm{Df}(a, n+1)$.

$r_0 = 0 \in \mathrm{Df}(a, n+1)$. (由 (3))

假设 $r_k \in \mathrm{Df}(a, n+1)$，则

$$\begin{aligned} r_{k+1} &= \{t \in a^{n+1} \mid \exists i < k+1(t(n) = t(i))\} \\ &= \{t \in a^{n+1} \mid \exists i < k(t(n) = t(i))\} \cup \\ &\qquad \cup \{t \in a^{n+1} \mid t(n) = t(k)\} \\ &= r_k \cup \mathrm{D}_=(a, n+1, n, k) \in \mathrm{Df}(a, n+1). \text{ (由 (2))} \end{aligned}$$

$k = n$ 时，得

$$r_n = \{t \in a^{n+1} \mid \exists i < n(t(n) = t(i))\} \in \mathrm{Df}(a, n+1). \tag{4}$$

对固定的 n，任取 $x = \{a_0, \cdots, a_{n-1}\} \subset a$，并记

$$s = (a_0, \cdots, a_{n-1}) \in a^n.$$

于是当 $y \in a$ 时，$s''y = (a_0, \cdots, a_{n-1}, y) \in a^{n+1}$，且

$$x = \{y \in a \mid s''y \in r_n\}. \quad \text{(由 (4))}$$

由定义 1 得 $x \in \mathcal{D}(a)$. 至此已证得

$$\forall x \subset a(|x| = n \rightarrow x \in \mathcal{D}(a)).$$

证 毕

有了可定义幂集算子 $\mathcal{D}$，便可引出重要的可构成集的概念.

定义 2 (可构成集)

可构成集类 $\mathrm{L} = \cup_{\alpha \in \mathrm{On}} l_\alpha$，其中:

$l_0 = 0$,

$$l_{\alpha+1} = \mathcal{D}(l_\alpha),$$
$$l_\alpha = \cup_{\gamma<\alpha} l_\gamma, \text{ 当 } \alpha \text{ 为极限序数时.}$$

定义毕

l_α 与 v_α 的差别仅在于 3.4 节定义 1 中的幂集运算 $\mathcal{P}$ 现在是用 $\mathcal{D}$ 代替了. l_α 与 v_α 有不少性质是相似的.

因 $\mathcal{D}(a) \subset \mathcal{P}(a)$, 故易知 $l_\alpha \subset \mathrm{v}_\alpha$(对 α 归纳).

命题 3 （Ⅰ） **每个 l_α 是可递集, 故 L 是可递类.**

（Ⅱ） $\gamma < \alpha \rightarrow l_\gamma \subset l_\alpha$.

（Ⅲ） $l_\alpha \in l_{\alpha+1}$.

证明 （Ⅰ）与（Ⅱ）同时对 α 归纳.

$\alpha = 0$ 为平凡情形.

α 是极限序数时, 与 3.4 节命题 1（Ⅰ）, (Ⅲ) 的证法同, 只要把 v 改为 l 便可.

当 $\alpha = \beta + 1$ 时, $l_\alpha = \mathcal{D}(l_\beta)$. 由命题 2（Ⅰ）知 $l_\beta \subset \mathcal{D}(l_\beta)$, 故

$$l_\beta \subset l_\alpha = \mathcal{D}(l_\beta) \subset \mathcal{P}(l_\beta) \subset \mathcal{P}(l_\alpha).$$

由 $l_\alpha \subset \mathcal{P}(l_\alpha)$ 得 l_α 是可递集. 此外,

$$\gamma < \alpha \rightarrow \gamma \leq \beta \rightarrow l_\gamma \subset l_\beta \rightarrow l_\gamma \subset l_\alpha.$$

(中间用了归纳假设)

(Ⅲ) 利用命题 1,

$$l_\alpha = \{x \in l_\alpha \mid (x = x)^{l_\alpha}\} \in \mathcal{D}(l_\alpha) = l_{\alpha+1}.$$

证 毕

与良基集的情形 (3.4 节) 类似, 对任一可构成集 $x \in \mathrm{L}$, $x \in l_\alpha$ 的最小 α 一定是后继序数(这由定义 2 立即可知). 类似于良基集的秩, 每个可构成集都有一个 L - 秩.

定义 3 (L - 秩)

设 $x \in \mathrm{L}$. x 的 L - 秩用 $\rho(x)$ 表示, 指

$$\rho(x) = \text{使} x \in l_{\beta+1} \text{ 的最小 } \beta.$$

定义毕

当 $\rho(x)=\beta$ 时，由定义即知:

$x \notin l_\beta$ 但 $x \in l_{\beta+1}$，这时有 $x \subset l_\beta$. (5)

$\forall\alpha > \beta\ x \in l_\alpha$. (由命题 3 (II) 及 $\alpha \geq \beta+1$) (6)

命题 4 $l_\alpha = \{x \in \mathrm{L} \mid \rho(x) < \alpha\}$.

证明 先设 $\beta = \rho(x) < \alpha$，由 (6) 得 $x \in l_\alpha$.

再设 $x \in l_\alpha$. 若 $\beta = \rho(x) \geq \alpha$，则由命题 3 (II) 得 $x \in l_\beta$，与 (5) 矛盾.

证 毕

命题 5 (I) $\forall\alpha \in \mathrm{On}(l_\alpha \cap \mathrm{On} = \alpha)$.

(II) $\forall\alpha \in \mathrm{On}(\alpha \in \mathrm{L}\ \wedge\ \rho(\alpha) = \alpha)$.

证明 (I) 对 α 归纳.

$\alpha = 0$ 为平凡情形.

α 为极限序数时，$\alpha = \cup\alpha = \cup_{\gamma<\alpha}\gamma$(2.3 节命题 5). 这时

$$\begin{aligned} l_\alpha \cap \mathrm{On} &= (\cup_{\gamma<\alpha} l_\gamma) \cap \mathrm{On} \\ &= \cup_{\gamma<\alpha}(l_\gamma \cap \mathrm{On}) \\ &= \cup_{\gamma<\alpha}\gamma \qquad (\text{由归纳假设}) \\ &= \alpha. \end{aligned}$$

当 $\alpha = \beta+1$ 时，设 $l_\beta \cap \mathrm{On} = \beta$. 因 $l_\alpha \subset \mathcal{P}(l_\beta)$，故有

$$\gamma \in l_\alpha \ \rightarrow\ \gamma \subset l_\beta \ \rightarrow\ \gamma \subset \beta \ \rightarrow\ \gamma \leq \beta \ \rightarrow\ \gamma \in \alpha.$$

这说明 $l_\alpha \cap \mathrm{On} \subset \alpha$. 还要证 $\alpha \subset l_\alpha \cap \mathrm{On}$. 因 $\alpha = \beta \cup \{\beta\}$ 及 $\beta \subset l_\beta \subset l_\alpha$，故只用证 $\beta \in l_\alpha$ 便可. 在 6.2 节定理 1 中已证公式 "x 是序数"等价于一只含有有界量词的公式(还要注意 5.3 节定理 1 — 10° 的证明). 利用 5.3 节命题 2便知 "x 是序数"对可递集 l_β 是绝对的. 于是

$$\begin{aligned} \beta &= l_\beta \cap \mathrm{On} \qquad (\text{归纳假设}) \\ &= \{x \in l_\beta \mid x \text{ 是序数}\} \\ &= \{x \in l_\beta \mid (x\text{是序数})^{l_\beta}\}. \end{aligned}$$

利用本节命题 1 便知 $\beta \in \mathcal{D}(l_\beta) = l_\alpha$.

(Ⅱ) 由 (Ⅰ) 首先有 $\alpha + 1 = l_{\alpha+1} \cap \mathrm{On}$, 故 $\alpha \in l_{\alpha+1}$, 由此及 $\rho(x)$ 的定义得 $\rho(\alpha) \leq \alpha$. 再由 (Ⅰ) 得

$$l_{\rho(\alpha)+1} \cap \mathrm{On} = \rho(\alpha) + 1,$$

$$\alpha \in \rho(\alpha) + 1 \quad (\text{注意 } \alpha \in l_{\rho(\alpha)+1}), \quad \alpha \leq \rho(\alpha).$$

证　毕

命题 6　(Ⅰ) $\forall n \in \omega,\ l_n = \mathrm{v}_n$.

(Ⅱ) $l_\omega = \mathrm{v}_\omega$.

证明　(Ⅰ) 对 n 归纳.

$$\begin{aligned} x \in \mathrm{v}_{n+1} &\to x \subset \mathrm{v}_n \subset l_n \quad (\text{归纳假设}) \\ &\to |x| \leq |\mathrm{v}_n| < \omega \\ &\to x \in \mathcal{D}(l_n) = l_{n+1}. \quad (\text{由命题 } 2\ (\text{Ⅱ})) \end{aligned}$$

(Ⅱ) $l_\omega = \cup_{n\in\omega} l_n = \cup_{n\in\omega} \mathrm{v}_n = \mathrm{v}_\omega$.

证　毕

练习二十五

1. (Ⅰ) 设 $a_0, \cdots, a_{n-1} \in a$. 试用命题 1 证明 $\{a_0, \cdots, a_{n-1}\} \in \mathcal{D}(a)$, 即: 有限子集是可定义的.

(Ⅱ) 证明 l_α 的所有有限子集都在 $l_{\alpha+1}$ 中.

2. 能否用题 1 (Ⅰ) 中的方法来证明 6.5 节命题 2 (Ⅱ)?

6.6　可构成公理相对于ZF的无矛盾性

直观上看, 并非所有集都是可构成集, 但基于 ZF 却证明不了这件事. 本节将基于 ZF 证明: 可构成公理(即"所有集都是可构成集")相对于 ZF 是无矛盾的.

可构成公理　V=L, 即: $\forall x\, \exists \alpha\, x \in l_\alpha$.

我们要基于 ZF 证明 L 是 ZF+(V=L) 的模型，即 ZF 的所有公理加上可构成公理在 L 中为真.

命题 1 l_α 作为 α 的函数对 ZF 的可递模型是绝对的.

证明 我们已经知道 Df 的绝对性(见 6.4 节命题 4). 再由算子 $\mathcal{D}$ 的定义(6.5 节定义 1)易得 $\mathcal{D}$ 的绝对性. l_α 是用 $\mathcal{D}$ 对 α 归纳定义而得，故也是绝对的.

证 毕

定理 1 L 是 ZF+(V=L) 的模型.

证明 1° 外延公理在 L 中为真. 是由于 L 是可递的(5.4 节命题 1).

2° 基础公理在 L 中为真，根据是 5.4 节命题 3 .

3° 内涵公理的验证:

设 $\varphi(x, s, z_1, \cdots, z_n)$ 是任一公式. 任取 $s, z_1, \cdots, z_n \in$ L，则存在某个 α 使 $s, z_1, \cdots, z_n \in l_\alpha$. 对 l_α 与 L 应用 6.3 节定理 1 可得 $\beta > \alpha$，使 φ 对 (l_β, L) 是绝对的. 此时 $s, z_1, \cdots, z_n \in l_\beta$. 注意 l_β 的可递性，$x \in s \rightarrow x \in l_\beta$. 再根据 6.5 节命题 1 便得

$$y = \{x \in s \mid \varphi^{\text{L}}(x, s, z_1, \cdots, z_n)\}$$
$$= \{x \in l_\beta \mid x \in s \wedge \varphi^{l_\beta}(x, s, z_1, \cdots, z_n)\} \in \mathcal{D}(l_\beta).$$

这就证明了内涵公理在 L 中为真:

$$\forall s, z_1, \cdots, z_n \in \text{L}\ \exists y \in \text{L}\ \forall x \in \text{L}(x \in y \leftrightarrow x \in s \wedge \varphi^{\text{L}}(x, s, z_1, \cdots, z_n)).$$

4° 无序对公理的验证:

设 $x, y \in \text{L}$，则存在 α 使 $x, y \in l_\alpha$. 令 $z = l_\alpha (\in l_{\alpha+1})$，于是得

$$\forall x, y \in \text{L}\ \exists z \in \text{L}\ (x \in z \wedge y \in z).$$

5° 并集公理的验证:

设 $x \in \text{L}$，则存在 α 使 $x \in l_\alpha$. 取 $y = l_\alpha$，得

$$\forall x \in \text{L}\ \exists y \in \text{L}\ \forall z, t \in \text{L}\ (t \in z \wedge z \in x \rightarrow t \in y).$$

6° 幂集公理的验证:

设 $x \in \mathrm{L}$. 令

$$\alpha = \cup\{\rho(z)+1 \mid z \in \mathrm{L} \ \wedge \ z \subset x\}.$$

取 $y = l_\alpha (\in \mathrm{L})$. 当 $z \in \mathrm{L} \wedge z \subset x$ 时有 $\rho(z) < \alpha$, 故 $z \in l_\alpha = y$. 这就证明了幂集公理在 L 中为真:

$$\forall x \in \mathrm{L}\ \exists y \in \mathrm{L}\ \forall z \in \mathrm{L}\ (z \subset x \ \rightarrow \ z \in y).$$

7° 替换公理的验证:

对公式 $\varphi(x, y, z, t_1, \cdots, t_n)$, 设 $z, t_1, \cdots, t_n \in \mathrm{L}$. 假如有

(*) $\quad \forall x \in z\ \exists! y \in \mathrm{L}\ \varphi^{\mathrm{L}}(x, y, z, t_1, \cdots, t_n)$,

令 $\alpha = \cup\{\rho(y)+1 \mid \exists x \in z\ \varphi^{\mathrm{L}}(x, y, z, t_1, \cdots, t_n)\}$. 当 $x \in z$ 时, 由 (*) 知存在 $y \in \mathrm{L}$ 使 $\varphi^{\mathrm{L}}(x, y, z, t_1, \cdots, t_n)$. 这时 $\rho(y) < \rho(y)+1 \leq \alpha$, 所以 $y \in l_\alpha$. 令 $s = l_\alpha$. 于是从 (*) 证明了所需要的结果

$$\exists s \in \mathrm{L}\ \forall x \in z\ \exists y \in s\ \varphi^{\mathrm{L}}(x, y, z, t_1, \cdots, t_n).$$

8° 无限公理的验证:

至此已证 L 是“ ZF −无限公理”的模型, 故知“ 0”和“集的后继”对 L 是绝对的(5.3 节定理 1 − 5°, 9°). 因 $\omega \in \mathrm{L}$, 故得

$$\exists x \in \mathrm{L}\ (0 \in x \ \wedge \ \forall y \in x\ (y' \in x)).$$

9° 可构成公理的验证:

前面 1° — 8° 已证 L 是 ZF 的模型. 根据命题 1 知 l_α 对 L 是绝对的. 任取 $x \in \mathrm{L}$, 再取 α 使 $x \in l_\alpha$. 这样就证明了 (V=L) 在 L 中为真:

$$\forall x \in \mathrm{L}\ \exists \alpha \in \mathrm{L}\ (x \in l_\alpha)^L.$$

证 毕

推论 若 ZF 是无矛盾的, 则 ZF+(V=L) 也是无矛盾的.

证明 基于 ZF 已经证明 L 是 ZF+(V=L) 的模型. 由 5.2 节引理 1 便得出结论.

证 毕

这就是 L —— 可构成集宇宙. 尽管通常不是把 L 而是把良基集类 WF 或良序集类 WO 作为数学的基础集域, 但 L 还是个相当大的舞台, ZF 理论能在其中演出. 我们还将基于 ZF 证明选择公理 (AC) 及广义连续统假设 (GCH) 也在 L 中为真.

练习二十六

1. (L 的极小性)设 M 是 ZF 的任一可递真类模型. 试证

$$\mathrm{L} = \mathrm{L}^M \subset M.$$

6.7 选择公理相对于Z F 的无矛盾性

我们从考察任一可构成集是否可良序的角度来考察选择公理在 L 中的真假. 为此, 先对 α 归纳定义 l_α 上的二元关系 R_α.

令 $R_0 = 0$.

假设 l_α 上的 R_α 已经规定, 现要规定 $l_{\alpha+1}$ 上的二元关系 $R_{\alpha+1}$.

设 R_α 是 l_α 上的良序, 则由 R_α 对每个 n 按通常字典顺序先诱导出 l_α^n (由 l_α 的元素组成的有序 n 元组的全体)上的良序 R_α^n. 有了 R_α^n 以后, 任取 $x \in l_{\alpha+1} = \mathcal{D}(l_\alpha)$. 按 6.5 节中关于 $\mathcal{D}$ 的定义, x 是 l_α 具有以下性质 * 的子集.

$$(*) \qquad \exists n \in \omega\, \exists s \in l_\alpha^n\, \exists r \in \mathrm{Df}(l_\alpha,\ n+1)(x = \\ = \{y \in l_\alpha \mid s''y \in r\}).$$

注意 (*) 中开头接连出现的三个存在量词, 这使我们可以把 x 与以下三个集相联系: n_x, s_x, m_x, 其中 n_x 规定为使

$$\exists s \in l_\alpha^n\, \exists r \in \mathrm{Df}(l_\alpha,\ n+1)(x = \{y \in l_\alpha \mid s''y \in r\})$$

成立的最小 n; s_x 表示 $l_\alpha^{n_x}$ 中使

$$\exists r \in \mathrm{Df}(l_\alpha,\ n_x+1)(x = \{y \in l_\alpha \mid s''y \in r\})$$

成立的 $R_\alpha^{n_x}$ - 最小元 s; m_x 表示使

$$x = \{y \in l_\alpha \mid s''y \in \mathrm{E}(l_\alpha, n_x + 1, m)\}$$

成立的最小 m(注意 6.4 节命题 2). 这样, 便可在 $l_{\alpha+1}$ 中规定序 $R_{\alpha+1}$ 如下:

对任意 $x, y \in l_{\alpha+1}$, 规定 $xR_{\alpha+1}y$ 为

(Ⅰ) $x, y \in l_\alpha$ 且 $xR_\alpha y$, 或

(Ⅱ) $x \in l_\alpha$ 但 $y \notin l_\alpha$, 或

(Ⅲ) $x, y \notin l_\alpha$, 但这时 $n_x < n_y$,

或 $n_x = n_y$ 但 $s_x R_\alpha^{n_x} s_y$,

或 $n_x = n_y$, $s_x = s_y$ 但 $m_x < m_y$.

最后, 当 α 为极限序数时, 规定

$$R_\alpha = \{(x, y) \in l_\alpha \times l_\alpha \mid \rho(x) \leq \rho(y) \ \wedge \ xR_{\rho(y)+1}y\}.$$

定理 1 如上规定的 R_α 是 l_α 上的良序.

证明 对 α 归纳:

$\alpha = 0$ 为平凡情形.

设 R_α 是 l_α 上的良序, 下证 $R_{\alpha+1}$ 是 $l_{\alpha+1}$ 上的良序.

反自反性与三分律对 $R_{\alpha+1}$ 显然成立(用到归纳假设).

设 $xR_{\alpha+1}y$ 且 $yR_{\alpha+1}z$. 当 $\rho(z) < \alpha$ 时, 对 (y, z), 上述规定中的情形 (Ⅱ) , (Ⅲ) 不会出现, 而只会出现 (Ⅰ) 的情形, 即 $y, z \in l_\alpha$. 又因 $xR_{\alpha+1}y$, 故 $x \in l_\alpha$. 由 l_α 中的 R_α - 可递性知 $xR_\alpha z$, 进而 $xR_{\alpha+1}z$. 当 $\rho(z) = \alpha$ 时, 若 $\rho(x) < \rho(z)$, 则对 (x, z) 上述规定中的情形 (Ⅱ) 出现, 于是 $xR_{\alpha+1}z$; 若 $\rho(x) = \rho(z)$, 则 $x, y, z \notin l_\alpha$, 这时情形 (Ⅲ) 出现, 易知 $xR_{\alpha+1}z$.

为验证 $R_{\alpha+1}$ - 良基性, 设 $0 \neq a \subset l_{\alpha+1}$. 当 $a \subset l_{\alpha+1} - l_\alpha$ 时, 由规定中情形 (Ⅲ) 易得 a 的 $R_{\alpha+1}$ - 最小元; 而 $\min\{\rho(y) \mid y \in a\} < \alpha$ 时, 有 $a \cap l_\alpha \neq 0$, 这时由 l_α 中 R_α - 良序性可得 $a \cap l_\alpha$ 的 R_α - 最小元, 也是 a 的 $R_{\alpha+1}$ - 最小元.

当 α 为极限序数时, 用类似的方法易证 R_α 是 l_α 上的良序.

证　毕

推论 1　$(V=L) \to AC$，故 AC 在 L 中为真.

证明　任取集 $x \in V$，存在 α 使 $x \subset l_\alpha$. 于是 l_α 上的良序 R_α 使 x 得到良序. 这就由 $(V=L)$ 证明了 AC . 上节已证 $(V=L)$ 在 L 中为真，由 5.2 节可靠性定理推论知 AC 在 L 中为真.

证　毕

我们基于 ZF 证明了 L 是 ZF+AC 的模型，从而也就证明了选择公理相对于 ZF 的无矛盾性.

练习二十七

1. 验证定理 1 的结论当 α 为极限序数时为真.

2. (6.3 节推论 5 的改进，参见 7.5 节命题 5)基于 ZF 证明：ZFC+$(V=L)$ 的任何有限片断都存在可数的可递集模型.

6.8　连续统假设相对于ZFC的无矛盾性

本节中将证明 $(V=L) \to GCH$. 由于上节已证 $(V=L) \to AC$，故现在随时可用 AC.

命题 1　(Ⅰ)　$|a| \geq \omega \;\to\; |\mathcal{D}(a)| = |a|$.

(Ⅱ)　$\alpha \geq \omega \;\to\; |l_\alpha| = |\alpha|$.

证明　(Ⅰ)　由 $\mathcal{D}(a)$ 的定义可知存在 $\omega \times a^n \times \mathrm{Df}(a,\ n+1)$ 到 $\mathcal{D}(a)$ 的满射，故 $|\mathcal{D}(a)| \leq |\omega \times a^n \times \mathrm{Df}(a,\ n+1)| = |a|$(注意 6.4 节命题 3).

又因 $\forall x \in a(\{x\} \in \mathcal{D}(a))$(由 6.5 节命题 2(Ⅱ))，故 $|a| \leq |\mathcal{D}(a)|$.

(Ⅱ)　对 α 归纳：

$\alpha = \omega$ 时，$|l_\omega| = |\mathrm{v}_\omega| = \omega$ (由 6.5 节命题 6(Ⅱ) 及 4.5 节命

题 5).

假设 $\forall\beta < \alpha(\beta \geq \omega \ \rightarrow \ |l_\beta| = |\beta|)$.

若 α 是极限序数, 则 $l_\alpha = \cup_{\beta<\alpha} l_\beta$. $\beta < \alpha$ 时 $|l_\beta| \leq |\alpha|$, 因为

$\beta < \omega$ 时, $|l_\beta| = |\mathrm{v}_\beta| < \omega \leq |\alpha|$;

$\beta \geq \omega$时, 由归纳假设 $|l_\beta| = |\beta| \leq |\alpha|$.

由 4.6 节命题 3 即得 $|l_\alpha| \leq |\alpha|$. 又因 $\alpha \subset l_\alpha$, 故 $|\alpha| \leq |l_\alpha|$.

若 $\alpha = \beta + 1$, 则 $|l_\beta| = |\beta| = |\alpha| \geq \omega$. 由 (I) 即得

$$|l_\alpha| = |\mathcal{D}(l_\beta)| = |l_\beta| = |\alpha|.$$

证 毕

以下把含于类 M 中的序数全体记作 $\mathrm{O}(M)$, 即

$$\mathrm{O}(M) = M \cap \mathrm{On}. \tag{1}$$

命题 2 若 M 是可递集, 则 $\mathrm{O}(M)$ 是序数, 且是不在 M 中的最小序数.

证明 若 M 是可递集, 则由 (1) 知 $\mathrm{O}(M)$ 也是可递集, 所以 $\mathrm{O}(M)$ 是序数(2.2 节定理 1). $\mathrm{O}(M) \notin M$, 否则导致 $\mathrm{O}(M) \in \mathrm{O}(M)$. 又因比 $\mathrm{O}(M)$ 小的序数都在 M 中, 故 $\mathrm{O}(M)$ 是不在 M 中的最小序数.

证 毕

命题 3 存在 ZF 中有限条公理的合取式 $\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n$, 记作 φ, 使得对任意可递集 M,

(I) $\varphi^M \ \rightarrow \ l_{\mathrm{O}(M)} = \mathrm{L}^M$,

(II) $(\varphi \ \wedge \ (\mathrm{V} = \mathrm{L}))^M \ \rightarrow \ l_{\mathrm{O}(M)} = M$.

证明 设 M 是可递集. 为了证明最大的序数不存在(2.2 节中已证此事), 只要用到 ZF 的有限条公理. 为了对 M 证明前面所有已建立的绝对性的结论是正确的, 也只要 M 是 ZF 的某个有限片断的模型就可以了. 我们现把所需要的 ZF 中的这有限条公理全部拿来作成合取式, 记作 φ. 下证 φ 就是满足命题条件 (I), (II) 的合取式.

(Ⅰ) 设已知 φ^M，则在 M 中不存在最大序数，从而 $\mathrm{O}(M)$ 只能是极限序数(由 $\mathrm{O}(M)$ 的最小性). 这样便有

$$\begin{aligned}
l_{\mathrm{O}(M)} &= \cup_{\alpha\in \mathrm{O}(M)} l_\alpha = \cup_{\alpha\in M} l_\alpha \\
&= \{x \mid \exists\alpha \in M(x \in l_\alpha)\} \\
&= \{x \in M \mid (\exists\alpha(x \in l_\alpha))^M\} \\
&\qquad (\text{用 } l_\alpha \text{ 对 } M \text{ 的绝对性及 } M \text{ 的可递性}) \\
&= \{x \in M \mid (x \in \mathrm{L})^M\} \\
&= \mathrm{L}^M \quad (\text{见 6.2 节命题 3 前关于类符号 } A^M \text{ 的规定})
\end{aligned}$$

(Ⅱ) 已知 $(\mathrm{V} = \mathrm{L})^M$，即 $(\forall x(x \in \mathrm{L}))^M$，即 $\forall x \in M(x \in \mathrm{L})^M$，于是

$$M = \mathrm{L}^M = l_{\mathrm{O}(M)}$$

证 毕

定理 1 $(\mathrm{V} = \mathrm{L}) \rightarrow \mathrm{GCH}$. 故 GCH 在 L 中为真.

证明 取命题 3 中的合取式 φ，对任意可递集 M，有

(*) $\quad \varphi^M \wedge (\mathrm{V} = \mathrm{L})^M \rightarrow M = l_{\mathrm{O}(M)}$. (命题 3(Ⅱ))

任取基数 $\kappa \geq \omega$. 先证 $\mathcal{P}(l_\kappa) \subset l_{\kappa^+}$，其中 κ^+ 是大于 κ 的最小基数. 为此，任取 $a \in \mathcal{P}(l_\kappa)$，令

$$b = l_\kappa \cup \{a\}.$$

由命题 1(Ⅱ) 知

$$|b| = |l_\kappa| = \kappa.$$

l_κ 是可递集，易知 b 也是可递集 $(a \subset l_\kappa)$.

根据 6.3 节定理 3 (其中取 T 为 V ,取 x 为 b)，一定存在可递集 $M \supset b$, $|M| = \kappa$，且

$$(\varphi \wedge \mathrm{V} = \mathrm{L})^M \leftrightarrow (\varphi \wedge \mathrm{V} = \mathrm{L}).$$

由 (*) 便得 $M = l_{\mathrm{O(M)}}$. 于是由命题 1(Ⅱ) 可得

$$|\mathrm{O}(M)| = |l_{\mathrm{O}(M)}| = |M| = \kappa < \kappa^+,$$
$$a \in b \subset M = l_{\mathrm{O}(M)} \subset l_{\kappa^+}.$$

至此证明了 $\mathcal{P}(l_\kappa) \subset l_{\kappa^+}$. 由 6.5 节命题 5(I) 知 $\kappa \subset l_\kappa$, 故

$$\mathcal{P}(\kappa) \subset \mathcal{P}(l_\kappa) \subset l_{\kappa^+}.$$

最后, 因 $|\mathcal{P}(\kappa)| = 2^\kappa$ 及 $|l_{\kappa^+}| = \kappa^+$, 得 $2^\kappa = \kappa^+$.

证　毕

这样我们便基于 ZF 得到了以下结论:

$(\mathrm{V} = \mathrm{L}) \rightarrow \mathrm{AC} + \mathrm{GCH}$,

$(\mathrm{AC} + \mathrm{GCH})^{\mathrm{L}}$,

L 是 ZF + AC + GCH 的模型.

最后根据 5.2 节引理 1 得出结论:

若 ZF 无矛盾, 则 ZF + AC + GCH 也无矛盾.

选择公理 AC 与广义连续统假设 GCH 相对于 ZF 都是无矛盾的, 但二者的地位有所不同. 现有的数学很多部分少不了选择公理, 但一般并不需要把广义连续统假设作为公理.

7 力迫法, 连续统假设的相对独立性

本章要建立这样的结论: 若 ZF 无矛盾, 则 ZFC + ¬CH 也无矛盾. 换句话说, 连续统假设相对于 ZF 是独立的.

为了方便, 以下每当说"集 M 是 ZFC 的模型", 都指的是" M 是 ZFC 的某个够用的有限片断的集模型". 按 6.3 节推论 5 及其后的说明, 基于 ZFC 可以证明: 这样的 M 总是存在的: ZFC 的任何有限片断总有可数的可递集模型.

7.1 再谈偏序

本节要做些准备工作, 基本想法是: 设法把一些相对无矛盾性的问题化归为有关偏序的组合学问题. 这就要求熟悉有关偏序的概念和结论.

我们基于 ZFC 展开讨论.

在 2.1 节中已建立了偏序的概念. 集 a 上的偏序 r(或用"$<$"表示), 指 a 上具有反自反性及可递性的二元关系. 下面用"$\leq$"重新给出定义.

定义 1 (偏序)

非空集 P 上的偏序, 用 $\leq$ 表示, 指 P 上具有以下性质的二元关系:

(Ⅰ) 自反性 $p \leq p$,

(Ⅱ) 可递性 $p \leq q \land q \leq r \rightarrow p \leq r$,

(Ⅲ) 反称性 $p \leq q \wedge q \leq p \rightarrow p = q$.

以上 p, q, r 为 P 中任意元素.

$p \leq q$ 时, 我们说 p 延伸 q, 或说 p 是 q 的延伸.

$p < q$ 被规定为 $p \leq q \wedge p \neq q$.

$(P, \leq)$ 称为偏序结构, P 称为偏序集.

定义毕

设 M 是 ZFC 的可递模型. 后面每当说 $P \in M$, 不仅指偏序集 $P \in M$, 而且同时指 P 上的偏序这个二元关系"$\leq$"也是 M 的元素.

定义 2 (链,反链与可数反链条件)

偏序集 P 中的链指集 $c \subset P$, 它具有性质:

$$\forall p, q \in c\,(p \leq q \vee q \leq p).$$

p 与 q 相容, 指 p 与 q 在 P 中有公共延伸:

$$\exists r \in P\,(r \leq p \vee r \leq q).$$

p 与 q 在 P 中无公共延伸时, 则说 p 与 q 不相容, 记作 $p \perp q$. P 中的反链指集 $a \subset P$, 它具有性质:

$$\forall p, q \in a(p \neq q \rightarrow p \perp q).$$

若 P 中所有反链都是可数集, 则说 P 具有可数反链条件.

定义毕

我们对具有可数反链条件的偏序集感兴趣的原因, 可参见后面 7.4 节定理 2.

例 1 设 $b \neq 0$, $P = \mathcal{P}(b) - \{0\}$. $p \leq q$ 定义为 $p \subset q$. 这时,

p 与 q 相容 $\leftrightarrow p \cap q \neq 0$;

$p \perp q \leftrightarrow p \cap q = 0$;

$a \subset p$ 是反链 $\leftrightarrow a$ 的元素互不相交;

易知: P 有可数反链条件 $\leftrightarrow |b| \leq \omega$.

定义 3 (稠子集与滤子)

设 P 是偏序集, D, $G \subset P$, $G \neq 0$.

D 是 P 的稠子集，指 $\forall p \in P\ \exists q \in D\ (q \leq p)$.

G 是 P 中的滤子，指 G 满足以下两个条件:

(Ⅰ) $\forall p, q \in G\ \exists r \in G\ (r \leq p\ \wedge\ r \leq q)$(即 G 中元素两两相容)，

(Ⅱ) $\forall p \in G\ \forall q \in P\ (p \leq q\ \rightarrow\ q \in G)$.

若偏序 P 中有最大元素，则将最大元素记作 e_P，简写作 e.

定义毕

往后只讨论带有最大元素的偏序. 对 P 的任何滤子 G，由定义知总有 $e \in G$.

在 P 的滤子中，我们感兴趣的是与某个特定集 M 相联系的一类具有典型性的滤子，它与 P 的每个属于 M 的稠子集相交:

定义 4　(集 M 上的 P 型滤子)

设 P 是偏序集. 集 M 上的 P 型滤子，指 P 中具有以下性质的滤子 G:

$$\forall D \subset P(D\ \text{是稠子集} \wedge D \in M\ \rightarrow\ G \cap D \neq 0).$$

定义毕

我们对 P 型滤子感兴趣，是因为这种滤子含众多信息. 它与有关稠子集都相交，表现了它的典型性即“广泛代表性”.

下面是关于可数集 M 上的 P 型滤子的存在性命题.

命题 1　设 P 是偏序集，$p \in P$. 若 M 是可数集，则存在 M 上的 P 型滤子 G 使 $p \in G$.

证明　把那些属于 M 的 P 的稠子集记为 D_0, D_1, $\cdots$ (至多可数个). 从 P 中归纳取出一串 $q_n (n \in \omega)$ 如下. 令 $q_0 = p$. 设 q_n 已经确定. 因 D_n 是稠子集，故存在 $q_{n+1} \in D_n$ 使 $q_{n+1} \leq q_n$. 于是有

$$q_0 \geq q_1 \geq q_2 \geq \cdots,\ \text{且}\ q_{n+1} \in D_n.$$

作 $G = \{r \in P \mid \text{存在某个}\ q_n \leq r\}$. 显然每个 $q_n \in G$，且 G 是滤子:

(Ⅰ) $\forall q, r \in G$，设 $q_{n_1} \leq q$，$q_{n_2} \leq r$. 取 n_1 与 n_2 的大者

为 n，则

$$q_n \leq q \ \wedge \ q_n \leq r.$$

(II) $\forall r \in G, q \in P$，存在 $q_n \leq r$，且当 $r \leq q$ 时 $q_n \leq q$，故 $q \in G$. G 是所要找的 P 型滤子，因为对任何 n，$G \cap D_n \neq 0$. 最后，$p = q_0 \in G$.

证 毕

命题 2 公式"$\leq$ 是 P 上的偏序"与"D 是偏序集 P 的稠子集"对 ZFC 的可递模型是绝对的.

证明 当 $r, P, D \in M$ 时，

r 是 P 上偏序 $\leftrightarrow$ $\forall p \in P(p, p) \in r \wedge$

$\wedge \forall p, q, s \in P((p, q) \in r \wedge (q, s) \in r \rightarrow (p, s) \in r) \wedge$

$\wedge \forall p, q \in P((p, q) \in r \wedge (q, p) \in r \rightarrow p = q)$;

D 是偏序集 P 的稠子集 $\leftrightarrow$ r 是 P 上偏序 $\wedge$

$$\wedge \forall p \in P \exists q \in D((q, p) \in r).$$

证 毕

如同以前的说明，这里的 M 只需要是 ZFC 的某个足够大的有限片断的可递模型.

命题 3 设集 M 是 ZFC 的可递模型，偏序集 $P \in M$，且满足

(*) $\forall p \in P \ \exists q, r \in P(q \leq p \wedge r \leq p \wedge q \perp r)$.

这时若 G 是 M 上的 P 型滤子，则 $G \notin M$.

证明 (反证)假设 $G \in M$，则 $D = P - G \in M$(因 $z = x - y$ 对 M 是绝对的，见 5.3 节定理 $1 - 8°$). D 是 P 的稠子集. 事实上，任取 $p \in P$，由 (*) 知存在 $q, r \in P$，q 与 r 是 p 的不相容延伸，于是 q 与 r 不能都在 G 中(否则 q 与 r 因 G 是滤子而相容)，必有一个在 $D = P - G$ 中.

D 是稠子集，但 $D \cap G = 0$，这与 M 上 P 型滤子的定义矛盾.

证 毕

不在 M 中的 P 型滤子是我们更感兴趣的. 后面我们很快就会明白, 给定满足条件 (*) 的 P , 由 P 型滤子 $G(\notin M)$ 就可得到 M 的有意义的真扩张 $M[G]$(参见 7.2 节命题 4).

练习二十八

1. 讨论 7.1 节定义 1 与 2.1 节定义 1 的统一性.

2. 设 $P=\{p\subset\omega\times 2\mid p\text{是函数且}|p|<\omega\}$. 规定 $p\leq q$ 为 $q\subset p$.

(Ⅰ) 验证 P 为偏序集.

(Ⅱ) $e_P=?$

(Ⅲ) 以 P 为例说明 7.1 节定义 1 与定义 2 中各概念的具体含义.

(Ⅳ) 证明 P 具有可数反链条件.

(Ⅴ) 证明 P 满足 7.1 节命题 3 中的条件 (*).

3. 设偏序集 $P\neq 0$, D 是 P 的可数个稠子集构成的子集族. 试证存在 P 中滤子 G 与族 D 中所有成员相交(这个命题是 Matin 公理的特殊情形, 通常写作 $\mathrm{MA}(\omega)$).

7.2 ZFC 的模型的兼纳扩张

以下如不说明, M 皆指 ZFC 的可递模型. 本节讨论由 P 型滤子 G 得到 M 的扩张模型 $M[G]$ 的方法.

回忆 6.1 节例 1 . 在 V 上定义良基似集关系 R:

$$yRx \quad \text{当且仅当} \quad y\in \mathrm{cl}(x).$$

对给定的偏序集 P, 可用 R 归纳定义出一个与 P 有关的函数

$F: \mathrm{V} \longrightarrow \mathrm{V},$

$$F(x) = \begin{cases} 1, & \text{若 } x \text{ 是关系, 对任意 } (y, z) \in x, \text{ 有 } z \in P \\ & \qquad \text{且} F(y) = 1 \\ 0, & \text{其他情形} \end{cases} \tag{1}$$

注意当 $(y, z) \in x$ 时，有 $y \in \mathrm{cl}(x)$ 即 yRx.

利用函数 F，可对给定的偏序集定义重要的标号概念：

定义 1 $(P$ - 标$)$

设 P 是偏序集. τ 叫做一个 P - 标，如果 $F(\tau) = 1$，其中函数 F 与 P 有关，由 (1) 式定义. P - 标的全体记作 $\mathrm{V}(P)$.

定义毕

定义 1 的意思是：对给定的偏序集 P，在 V 上对良基似集关系 R 用 (1) 归纳定义出的函数 F 是 P - 标的特征函数. 例如若取 $P = \{e\}$ (独元偏序集)，则以下集皆为 $\{e\}$ - 标：

$0, \{(0, e)\}, \{(\{(0, e)\}, e)\}, \{(0, e), (\{(0, e)\}, e)\}, \cdots$.

由 P - 标定义可知：

(Ⅰ) P - 标 τ 是一个关系，它满足：

$$\text{对任意 } (\sigma, p) \in \tau, \ p \in P \text{ 且 } \sigma \text{ 也是 } P\text{ - 标}. \tag{2}$$

(Ⅱ) 由 6.2 节定理 2，“τ 是 P - 标”(即 $F(\tau) = 1$)对 M 是绝对的(注意 $\mathrm{cl}(x)$ 也是由绝对的公式与函数归纳定义出的，所以 $\mathrm{cl}(x)$ 对 M 是绝对的). 在应用 6.2 节定理 2 时，要验证条件 $(R$是 V 上似集关系$)^M$. 注意

$$\begin{aligned} & R \text{ 是 V 上似集关系} \\ & \quad \leftrightarrow \ \forall x \, \exists t \, \forall y (y \in t \ \leftrightarrow \ y \in \mathrm{cl}(x)) \\ & \quad \leftrightarrow \ \forall x \, \exists t \ (t = \mathrm{cl}(x)). \end{aligned}$$

因 $\mathrm{cl}(x)$ 对 M 为绝对，故 $x \in M \ \rightarrow \ \mathrm{cl}(x) \in M$.

给定了偏序集 P，P - 标是很多的. 事实上，在下面的定义 2 中我们可以用 P 给每一个集“加标”，即可以归纳定义从 V 到 V 的加标函数，并把加标函数赋给任一集 x 的 P - 标记作 $\breve{x}$:

定义 2 (集 x 的 P - 标 $\breve{x}$)

$\breve{x} = \{(\breve{y}, e) \mid y \in x\}$, 其中 e 为偏序集 P 的最大元.

定义毕

归纳易证每个 $\breve{x}$ 都是 P - 标. 我们有:

$\breve{0} = 0$

$\breve{1} = \{(\breve{0}, e)\} = \{(0, e)\}$

$\breve{2} = \{(\breve{0}, e), (\breve{1}, e)\} = \{(0, e), (\{(0, e)\}, e)\}$

......

对给定的偏序集 P, 每个集都有相应的 P - 标; 但并非每个 P - 标都是由对集加标而得来, 除非 P 是独元集 $\{e\}$.

定义 2 中归纳定义所用的良基似集关系是 $\in$. $\breve{x}$ 的绝对性来自 6.2 节推论 1 .

当 $P \neq 0$ 时, 所有 P - 标构成的类 $\mathrm{V}(P)$ 是真类. 理由如下: 若 $\mathrm{V}(P)$ 是集, 则 $\mathrm{V}(P) \times P$ 也是 P - 标(符合条件 (2)), 从而 $\mathrm{V}(P) \times P \in \mathrm{V}(P)$, 这不可能(见练习十一题 1).

把属于 M 的 P - 标的全体记为 $M(P)$, 即

$$M(P) = M \cap \mathrm{V}(P).$$

我们引进 P - 标的概念, 是为了能灵活地找到扩张模型的方法, 使扩张的模型具有所需要的性质. 偏序集 P 的选取是自由的. 当我们构造 M 的扩张时, 并不单纯由 M 出发, 而是由 P - 标集 $\mathrm{V}(P)$ 出发,更确切地说是由 M 中的 P - 标集 $M(P)$ 出发来寻找包括 M 在内且比 M 更大的集模型.

设 G 是 M 上的 P 型滤子. 下面我们设法利用 P 与 G 得到 M 的有意义的扩张, 叫做 M 的兼纳扩张, 并用符号 $M[G]$ 表示. 做法是, 由名称(即标号) 来定对象, 通过 M 上 P 型滤子 G 对每个 P - 标 τ 规定属于 $M[G]$ 的相应的集 τ_G :

定义 3 (τ_G 与 $M[G]$)

设 M 是 ZFC 的可递集模型, 偏序集 $P \in M$, 且 G 是 M 上的 P 型滤子. 规定

$$\tau_G = \{\sigma_G \mid \exists p \in G \text{ 使 } (\sigma, p) \in \tau\}. \tag{2}$$

然后规定

$$M[G] = \{\tau_G \mid \tau \in M(P)\}.$$

$M[G]$ 叫做由 P 型滤子 G 得到的 M 的兼纳扩张.

定义毕

P - 标的绝对性决定了归纳定义出的 τ_G 的绝对性. 由定义还知

$$\text{若 } \sigma_G \in \tau_G, \text{ 则 } \sigma \in \mathrm{Dom}(\tau).$$

上面构造了 $M[G]$, 它由 τ_G 组成, τ 是 M 中的 P - 标. 眼下我们对 $M[G]$ 尚不熟悉, 只知它的每个成员在 M 中都有相应的标号, 由标号通过 G 构造出来. 在 M 中观察, 见到的只是标号 τ; 为了确定 $M[G]$ 中与 τ 对应的对象 τ_G, 需要有 G 的信息.

现在我们关心的事自然是: $M[G]$ 有什么性质? 它是 M 的真扩张吗? 是可递的吗? 进一步我们将关心它具有哪些新性质.

先建立一个关于 $M[G]$ 的极小性命题.

命题 1 设 N 是 ZFC 的可递模型, $G \in N$, 且 $M \subset N$, 则 $M[G] \subset N$.

证明 对每个 $\tau \in M(P)$, 因 τ, $G \in N$, 故 $\tau_G = (\tau_G)^N \in N$.

证 毕

因 G 是滤子, 故总有 $e \in G$. 由定义 3 中 (2) 知

$$(\sigma, e) \in \tau \rightarrow \sigma_G \in \tau_G.$$

相反方向的蕴涵式一般不成立, 除非 G 是独元集 $\{e\}$. 易见

$$\{(\sigma, e), (\tau, e)\}_G = \{\sigma_G, \tau_G\}.$$

我们见到两种过程: 在定义 2 中由集 x 得到相应的 P- 标 $\breve{x}$; 在定义 3 中由 P- 标 τ 得到相应的集 τ_G. 这两种过程是相反的, 例如:

$$(\breve{0})_G = 0_G = 0$$

$$(\breve{1})_G = \{(\breve{0}, e)\}_G = \{(\breve{0})_G\} = \{0\} = 1$$

$(\breve{2})_G = \{(\breve{0}, e), (\breve{1}, e)\}_G = \{(\breve{0})_G, (\breve{1})_G\} = \{0, 1\} = 2$

……

更一般，有

命题 2 $(\breve{x})_G = x$.

证明 对 x 归纳. 因 $\breve{x} = \{(\breve{y}, e) \mid y \in x\}$，故

$$
\begin{aligned}
(\breve{x})_G &= \{(\breve{y})_G \mid y \in x\} \qquad (\text{由 } (2))\\
&= \{y \mid y \in x\} \qquad (\text{由归纳假设})\\
&= x.
\end{aligned}
$$

证 毕

现在可以断言 $M[G]$ 是 M 的可递扩张:

命题 3 (Ⅰ) $\forall x \in M\ \breve{x} \in M(P)$.

(Ⅱ) $M \subset M[G]$.

(Ⅲ) $M[G]$ 是可递的.

证明 (Ⅰ) 由定义 2 归纳定义出的 $\breve{x}$ 对 M 是绝对的，即当 $x \in M$ 时 $\breve{x} \in M$，所以 $\breve{x} \in M(P)$.

(Ⅱ) 由 (Ⅰ) 及命题 2 即得

$$
\begin{aligned}
x \in M \ &\rightarrow \ \breve{x} \in M(P)\\
&\rightarrow . x = (\breve{x})_G \in M[G].
\end{aligned}
$$

(Ⅲ) 设 $\sigma_G \in \tau_G \in M[G]$. 由 M 的可递性及 $M[G]$ 与 τ_G 的定义，有

$$\tau \in M \ \rightarrow \ \mathrm{Dom}(\tau) \in M \ \rightarrow \ \sigma \in M \ \rightarrow \ \sigma_G \in M[G].$$

证 毕

在关于 $M[G]$ 的定义 3 中，包含了假设 $P \in M$. 每当涉及 $M[G]$，总有 $P \in M$. 这一点以后不再一一说明.

一般说来，不一定有 $G \in M$ (参见 7.1 节命题 3)，但肯定有

命题 4 $G \in M[G]$.

证明 记 $\gamma = \{(\breve{p}, p) \mid p \in P\}$. 因 $P \in M$，γ 对 M 为绝对，故 $\gamma \in M$，$\gamma_G \in M[G]$. 由 (2) ，

$$\gamma_G = \{(\breve{p})_G \mid p \in G\} = \{p \mid p \in G\} = G.$$

证 毕

命题 4 指出，要使 $M[G]$ 是 M 的真扩张，只须使 7.1 节命题 3 中的条件 (*) 得到满足，因此 $G \in M[G] - M$(练习二十八题 2 指出了一例).

一般来说 $G \notin M$. 但从命题 4 的证明中我们看到，G 与 $M[G]$ 中的其他成员一样也在 M 中有自己所对应的名称(即 P - 标). G 对应的 P - 标是 $\gamma = \{(\breve{p}, p) \mid p \in P\}$，$\gamma$ 所指称的对象就是 G：$G = \gamma_G$.

命题 5 (Ⅰ) $\mathrm{rank}(\tau_G) \leq \mathrm{rank}(\tau)$.

(Ⅱ) $\mathrm{O}(M[G]) = \mathrm{O}(M)$，即 $M[G]$ 与 M 包含相同的序数.

证明 (Ⅰ) 对 τ 归纳. 当 $\sigma_G \in \tau_G$ 时，$\sigma \in \{\sigma\} \in (\sigma, p) \in \tau$. 由归纳假设，

$$\mathrm{rank}(\sigma_G) \leq \mathrm{rank}(\sigma) < \mathrm{rank}(\tau),$$
$$\mathrm{rank}(\sigma_G) + 1 \leq \mathrm{rank}(\tau).$$

于是

$$\mathrm{rank}(\tau_G) = \cup\{\mathrm{rank}(\sigma_G) + 1 \mid \sigma_G \in \tau_G\} \leq \mathrm{rank}(\tau),$$

其中用到 3.4 节命题 6 .

(Ⅱ) 已证 $M \subset M[G]$. 任取 $M[G]$ 中序数 $\tau_G \in M[G] \cap \mathrm{On}$. 由 (Ⅰ) 有

$$\tau_G = \mathrm{rank}(\tau_G) \leq \mathrm{rank}(\tau) \in M \text{(注意 rank 的绝对性)}.$$

故 $\tau_G \in M \cap \mathrm{On} = \mathrm{O}(M)$.

证 毕

P 型滤子的功能来自它的特性 —— 与属于 M 的稠子集相交. 但与稠子集的概念相比，在有些情形下"下方稠"的概念更为重要，并常用"下方稠"代替"稠".

定义 4 (E 在 p 下方稠)

设 $p \in P$，$E \subset P$. 我们说 E 在 p 下方稠，是指 E 与 p 满足

$$\forall q \leq p \, \exists r \in E (r \leq q). \tag{3}$$

定义毕

命题 6 　设 $A \subset P$ 且 $A \in M$，G 为 M 上 P 型滤子.

(Ⅰ) $G \cap A = 0 \ \rightarrow\ \exists q \in G\ \forall r \in A(r \perp q)$.

(Ⅱ) 若 $p \in G$，则当 A 在 p 下方稠时 $G \cap A \neq 0$.

证明 (Ⅰ) 设 $D = B \cup C$，其中

$$B = \{p \mid \exists r \in A(p \leq r)\},$$
$$C = \{q \mid \forall r \in A(r \perp q)\}.$$

任取 $q \in P$，这时有两种可能：

1° 若 $q \notin D$，则由 $q \notin C$ 知存在 $r \in A$ 与 q 相容，即有 $p \in P$ 使 $p \leq r$(从而 $p \in B$，$p \in D$)且 $p \leq q$;

2° 若 $q \in D$，当然 $q \leq q$.

不管哪种情形，都存在 $p \in D$ 使 $p \leq q$. 这就说明 D 是 P 的稠子集. 因 G 是 P 型滤子，$G \cap D \neq 0$.

现设 $G \cap A = 0$，取 $q \in G \cap D$. 这时必有 $q \notin B$. 事实上，若 $q \in B$，即 $\exists r \in A$ 使 $q \leq r$，则 $r \in G$(因为 G 是滤子)，这与 $G \cap A = 0$ 的假设不符. 于是必有 $q \in G \cap C$，$\forall r \in A$，$r \perp q$.

(Ⅱ) 设 $p \in$ [illegible] A 在 p 下方稠，且 $G \cap A = 0$. 由 (Ⅰ) 知可取 $q \in G$ [illegible]

$$\text{每个 } r \in A \text{ 皆有 } r \perp q. \tag{4}$$

因 G 是滤子，故 p 与 q 相容，即有 $s \in G$ 使 $s \leq p$，$s \leq q$. 由定义 4 中的 (3) 知存在 $r \in A$ 使 $r \leq s \leq q$. 这与 (4) 矛盾.

证　毕

命题 6 (Ⅱ) 指出：P 型滤子与在自己的元素下方稠的子集相交.

最后引进一个后面要用到的符号.

设 σ，$\tau \in$ [illegible] 记

$$< \sigma, \tau > = \{(\{(\sigma, e)\}, e), (\{(\sigma, e), (\tau, e)\}, e)\}.$$

显然 $< \sigma, \tau > \in V(P)$.

命题 7 　$< \sigma, \tau >_G = (\sigma_G, \tau_G)$.

证明 由定义 3 中 (2)，

$$< \sigma, \tau >_G = \{\{(\sigma, e)\}_G, \{(\sigma, e), (\tau, e)\}_G\}$$
$$= \{\{\sigma_G\}, \{\sigma_G, \tau_G\}\} = (\sigma_G, \tau_G).$$

证 毕

既然 M 是 ZFC 的模型，我们站在 M 中工作，可以构造出许多属于 M 的偏序集. 不同的偏序集 P 会产生出不同的 $M[G]$. 我们想做的事是选用不同的 P 构造出不同的 $M[G]$，强迫 $M[G]$ 满足 ZFC，并同时具有所需要的性质.

练习二十九

1．设 $p \in P$ (偏序集)，G 为 M 上 P 型滤子.

$$\{(0, p)\}_G = ?$$

2．7.2 节命题 2 之逆

$$x = \tau_G \rightarrow \breve{x} = \tau$$

是否成立?

3．设 P 为练习二十八题 2 中的偏序集:

$$P = \{p \subset \omega \times 2 \mid p\text{是函数且 } |p| < \omega\}.$$

令 $f_G = \cup G$，G 为 M 上 P 型滤子，$P \in M$. 试证 $f_G \in M[G] - M$.

7.3 力 迫 法

本节中，M 表示 ZFC 的某个可数可递模型；P 表示某个偏序集，且 $P \in M$；e 表示 P 的最大元；G 表示 M 上的某个 P 型滤子；τ, σ, π 等表示 P - 标.

定义 1 (p 力迫 φ：$p \Vdash \varphi$)

设 $\tau_1, \cdots, \tau_n \in M(P)$，$p \in P$，公式 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ 中自由变元至多是 $x_1, \cdots, x_n$. 我们用 $p \Vdash \varphi(\tau_1, \cdots, \tau_n)$ (称作

p 力迫 φ)表示事实:

$$\forall G(p \in G \rightarrow \varphi^{M[G]}(\tau_{1G}, \cdots, \tau_{nG})). \qquad (1)$$

定义毕

定义中的 $\varphi^{M[G]}(\tau_{1G}, \cdots, \tau_{nG})$ 是指将相对式 $(\varphi(x_1, \cdots, x_n))^{M[G]}$ 中的 x_i 换成 τ_{iG} 所得结果. 记号“$p \Vdash \varphi(\tau_1, \cdots, \tau_n)$”实际上是个公式, 是由公式 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ 出发建立的另一个公式 $\psi_\varphi(\tau_1, \cdots, \tau_n, P, \leq, e, M, p)$, 这是个复杂的公式, 它断言定义 1 中的事实 (1) .

例 1 设 $\tau_1 = \{(\sigma_1, s)\}$, $\tau_2 = \{(\sigma_2, s)\}$, $s \in P$. 现问: $p \Vdash \tau_1 = \tau_2$ 对哪些 p 成立?

先看两个特殊情形.

当 $p \perp s$ 时, $p \Vdash \tau_1 = \tau_2$. 事实上, 对任何 G, 若 $p \in G$, 则 $s \notin G$(否则 p 与 s 相容), 于是 $\tau_{1G} = \tau_{2G}$ 成立(按 7.2 节定义 3 中 (2) , $\tau_{1G} = 0$, $\tau_{2G} = 0$).

当 $p \leq s$ 时,

$$p \Vdash \tau_1 = \tau_2 \leftrightarrow p \Vdash \sigma_1 = \sigma_2.$$

事实上, 若 $p \in G$, 则 $s \in G$(因 G 是滤子), 此时 $\tau_{1G} = \{\sigma_{1G}\}$, $\tau_{2G} = \{\sigma_{2G}\}$, 于是

$$\tau_{1G} = \tau_{2G} \leftrightarrow \sigma_{1G} = \sigma_{2G}.$$

进一步有如下充要条件(参见练习三十题 1):

$$p \Vdash \tau_1 = \tau_2 \leftrightarrow \forall q \leq p(q \leq s \rightarrow q \Vdash \sigma_1 = \sigma_2). \qquad (2)$$

命题 1 (I) $q \leq p$ 时, $p \Vdash \varphi \rightarrow q \Vdash \varphi$.

(II) $(p \Vdash \varphi \wedge p \Vdash \psi) \rightarrow p \Vdash \varphi \wedge \psi$.

证明 (I) 设 $q \in G$. 因 G 是滤子, 故每当 $q \leq p$ 时, 总有 $p \in G$, 从而有 $\varphi^{M[G]}(\tau_{1G}, \cdots, \tau_{nG})$.

(II) $\varphi^{M[G]} \wedge \psi^{M[G]} \rightarrow (\varphi \wedge \psi)^{M[G]}$.

证 毕

我们选用各种 P 来构造 M 的各种兼纳扩张 $M[G]$, 希望了

解 $M[G]$ 具有什么新的不同于 M 的特性.

站在 M 中, 不能一般地直接判断公式在 $M[G]$ 中的真假, 但因 $M[G]$ 的成员在 M 中皆有相应的 P - 标, 故有可能在 M 中通过对 P - 标的研究来判断 $p\Vdash\varphi(\tau_1, \cdots, \tau_n)$ 是否成立.

$p\Vdash\varphi$ 是在 V 中定义的与 M 有关的概念, 它涉及到所有 M 上的 P 型滤子. 下面与 M 无关地定义 $p\Vdash^*\varphi$, 使得相对于 M 来看 $p\Vdash^*\varphi$, 它与 $p\Vdash\varphi$ 是一回事. 定义之后, 我们将对这二者的关系进行仔细分析. $p\Vdash^*\varphi$ 的定义复杂些, 但不涉及模型 M . 我们先写出定义, 然后再作解释.

定义 2 ($p\Vdash^*\varphi$, p * - 力迫 φ)

设 P 是偏序, $p\in P$, $\tau_1, \cdots, \tau_n\in \mathrm{V}(P)$.

(I) $p\Vdash^*\tau_1=\tau_2$, 指对所有 $(\sigma_1, s)\in\tau_1$, E_2 在 p 下方稠; 且对所有 $(\sigma_2, s)\in\tau_2$, E_1 在 p 下方稠, 其中 E_1 与 E_2 是以下两集:

$$E_1=\{q\le p\mid q\le s\ \rightarrow\ \exists(\sigma_1, t)\in\tau_1(q\le t\wedge q\Vdash^*\sigma_1=\sigma_2)\},$$
$$E_2=\{q\le p\mid q\le s\ \rightarrow\ \exists(\sigma_2, t)\in\tau_2(q\le t\wedge q\Vdash^*\sigma_1=\sigma_2)\}.$$

(II) $p\Vdash^*\tau_1\in\tau_2$, 指下面的集在 p 下方稠:

$$\{q\mid\exists(\sigma, s)\in\tau_2(q\le s\ \wedge\ q\Vdash^*\sigma=\tau_1)\}.$$

(III) $p\Vdash^*\varphi(\tau_1, \cdots, \tau_n)\ \wedge\ \psi(\tau_1, \cdots, \tau_n)$, 指

$$p\Vdash^*\varphi(\tau_1, \cdots, \tau_n)\text{ 且 }p\Vdash^*\psi(\tau_1, \cdots, \tau_n).$$

(IV) $p\Vdash^*\neg\varphi(\tau_1, \cdots, \tau_n)$, 指不存在 $q\le p$ 使

$$q\Vdash^*\varphi(\tau_1, \cdots, \tau_n).$$

(V) $p\Vdash^*\exists x\,\varphi(x, \tau_1, \cdots, \tau_n)$, 指下面的集在 p 下方稠:

$$\{q\mid\exists\sigma\in\mathrm{V}(P)(q\Vdash^*\varphi(\sigma, \tau_1, \cdots, \tau_n))\}.$$

定义毕

定义 2 包含了两个归纳过程. 整个定义对公式的长度归纳: 先对原子公式定义, 然后分别对 $\wedge$, $\neg$ 和 $\exists x$ 型公式定义. 关于原子公式 $\tau_1=\tau_2$ 的定义受到例 1 中 (2) 的启发, 把对 $p\Vdash^*\tau_1=\tau_2$ 的判断归结为对 $q\Vdash^*\sigma_1=\sigma_2$ 的判断, 其中 $q\in P$, $\sigma_1\in\mathrm{Dom}(\tau_1)$

且 $\sigma_2 \in \mathrm{Dom}(\tau_2)$. $p\|\!\!-^* \tau_1 = \tau_2$ 的定义按 $\mathrm{V}(P) \times \mathrm{V}(P)$ 上的关系 R 进行归纳, 其中的 R 指:

$(\sigma_1, \sigma_2)\ R\ (\tau_1, \tau_2)$ 当且仅当 $\sigma_1 \in \mathrm{Dom}(\tau_1)$ 且 $\sigma_2 \in \mathrm{Dom}(\tau_2)$.

R 是良基关系, 因为当 $(\sigma_1, \sigma_2)\ R\ (\tau_1, \tau_2)$ 时, $\mathrm{rank}(\sigma_1) < \mathrm{rank}(\tau_1)$. R 是似集关系, 因为 $\{(\sigma_1, \sigma_2) \mid (\sigma_1, \sigma_2)\ R\ (\tau_1, \tau_2)\}$ 是集. 定义 2 (Ⅰ) 实际上定义了函数 $F: \mathrm{V}(P)\times\mathrm{V}(P) \longrightarrow \mathcal{P}(P)$,

$$F(\tau_1, \tau_2) = \{p \in P \mid p\|\!\!-^* \tau_1 = \tau_2)\}.$$

F 的值给出了使 $p\|\!\!-^* \tau_1 = \tau_2$ 成立的那些 p 的集. 对给定的 P - 标 τ_1 与 τ_2, 值 $F(\tau_1, \tau_2)$ 是由 F 对 (τ_1, τ_2) 之前的那些 (σ_1, σ_2) 的取值确定的. 由 R 及其他所涉及对象的绝对性得 F 的绝对性, 即: $p\|\!\!-^* \tau_1 = \tau_2$ 对 M 是绝对的.

整个定义 2 是由任一公式 $\varphi(x_1, \cdots, x_2)$ 出发来定义另一公式 $\psi^*(\tau_1, \cdots, \tau_n, P, \leq, p)$. "$\|\!\!-^*$"对于原子公式具有绝对性, 但对一般公式却不一定, 问题在定义 2 (Ⅴ) 中的 $\exists\sigma \in \mathrm{V}(P)$.

命题 2 以下三者等价:

(Ⅰ) $p\|\!\!-^* \varphi(\tau_1, \cdots, \tau_2)$,

(Ⅱ) $\forall r \leq p(r\|\!\!-^* \varphi(\tau_1, \cdots, \tau_2))$,

(Ⅲ) $\{r \mid r\|\!\!-^* \varphi(\tau_1, \cdots, \tau_2)\}$ 在 p 下方稠.

证明 (Ⅱ) → (Ⅲ) 是显然的. 先证结论:

若 $\{r \mid D$在 r 下方稠$\}$ 在 p 下方稠, 则 D 在 p 下方稠. (3)

事实上, 任取 $q \leq p$, 则由 (3) 的假设知存在 $r \leq q$ 使 D 在 r 下方稠. 由 D 在 r 方稠知存在 $s \in D$, $s \leq r$, 进而 $s \leq q$. s 的存在说明 D 在 p 下方稠.

以下的证明对公式 φ 的长度归纳. 对原子公式 $\tau_1 = \tau_2$ 与 $\tau_1 \in \tau_2$, 三者是等价的: (Ⅰ) → (Ⅱ), 是由于当 $r \leq p$ 时, 任何集若在 p 下方稠, 则当然在 r 下方稠; (Ⅲ) → (Ⅰ) 来自结论 (3).

对形为 $\varphi \wedge \psi$ 的公式用归纳假设即可得出结论.

对形为 $\neg\varphi$ 的公式, (Ⅰ) → (Ⅱ) 是平凡情形. 为证 (Ⅲ) → (Ⅰ), 设 $\{r \mid r\|\!\!-^* \neg\varphi\}$ 在 p 下方稠, 反证 $p\|\!\!-^* \neg\varphi$ 成立. 假如

有 $q \leq p$ 使 $q\Vdash^* \varphi$，则因 $\{r \mid r\Vdash^* \neg\varphi\}$ 在 p 下方稠，故存在 $\cdot \leq q$，$r\Vdash^* \neg\varphi$，于是 $r\Vdash^* \varphi$ 不成立. $q\Vdash^* \varphi$ 成立而 $r\Vdash^* \varphi$ 不成立，与（Ⅰ）→（Ⅱ）矛盾(由归纳假设，（Ⅰ）↔（Ⅱ）↔（Ⅲ）对 φ 成立).

最后讨论形为 $\exists x\varphi$ 的公式.

（Ⅰ）→（Ⅱ）　任取 $r \leq p$，要证 $r\Vdash^* \exists x\varphi(x, \tau_1, \cdots, \tau_n)$. 因 $p\Vdash^* \exists x\varphi$，故 $\{q \mid \exists\sigma \in V(P)(q\Vdash^* \varphi(\sigma, \tau_1, \cdots, \tau_n))\}$ 在 p 下方稠，从而在 r 下方稠.

（Ⅲ）→（Ⅰ）来自结论 (3).

证毕

下面的定理是本节的主要结论.

定理 1　设 $\tau_1, \cdots, \tau_n \in M(P)$，则

$\exists p \in G(p\Vdash^* \varphi(\tau_1, \cdots, \tau_n))^M \leftrightarrow \varphi^{M[G]}(\tau_{1G}, \cdots, \tau_{nG})$.

证明　**情形一**　φ 为 $\tau_1 = \tau_2$.

(→)　设 $p \in G$ 且 $p\Vdash^* \tau_1 = \tau_2$(等价于 $(p\Vdash^* \tau_1 = \tau_2)^M$)，要证 $\tau_{1G} = \tau_{2G}$.

任取 $\sigma_{1G} \in \tau_{1G}$，则有某个 $s \in G$ 使 $(\sigma_1, s) \in \tau_1$. 因 G 是滤子，故存在 $r \in G$，$r \leq p$，且 $r \leq s$. 由命题 2 知 $r\Vdash^* \tau_1 = \tau_2$，而由定义 2（Ⅰ）知下面的集 E 在 r 下方稠:

$E = \{q \leq r \mid q \leq s \rightarrow \exists(\sigma_2, t) \in \tau_2(q \leq t \wedge q\Vdash^* \sigma_1 = \sigma_2)\}$.

由 7.2 节命题 6（Ⅱ）知 $G \cap E \neq 0$，于是存在 $q \in G$ 且 $q \in E$. $q \in E$ 意味着 $q \leq r$，进而 $q \leq s$(因 $r \leq s$)，且存在 $(\sigma_2, t) \in \tau_2$ 使 $q \leq t \wedge q\Vdash^* \sigma_1 = \sigma_2$. 由归纳假设得 $\sigma_{1G} = \sigma_{2G}$，于是 $\sigma_{1G} \in \tau_{2G}$(注意 $q \in G \wedge q \leq t \rightarrow t \in G$). 这就证明了 $\tau_{1G} \subset \tau_{2G}$. 同理可证 $\tau_{2G} \subset \tau_{1G}$.

(←)　设 $\tau_{1G} = \tau_{2G}$，要证 $\exists p \in G\ p\Vdash^* \tau_1 = \tau_2$.

令 L 是具有以下性质之一的 $r \in P$ 的全体:

性质 1　$r\Vdash^* \tau_1 = \tau_2$，

性质 2　$\exists(\sigma_1, s) \in \tau_1(r \leq s \wedge \forall(\sigma_2, t) \in \tau_2\ \forall q \in P((q \leq$

$t \wedge q \Vdash^* \sigma_1 = \sigma_2) \rightarrow q \perp r))$.

性质 3 $\exists(\sigma_2, t) \in \tau_2 (r \leq t \wedge \forall(\sigma_1, s) \in \tau_1 \forall q \in P((q \leq s \wedge q \Vdash^* \sigma_1 = \sigma_2) \rightarrow q \perp r))$.

当 $r \in G$ 时，r 不会具有性质 2 或 3．理由是，若 $r \in G$ 且 r 具有性质 2，则存在 $(\sigma_1, s) \in \tau_1$，$r \leq s$，$s \in G$，故 $\sigma_{1G} \in \tau_{1G} = \tau_{2G}$. 这时存在 $(\sigma_2, t) \in \tau_2$，使 $t \in G$ 且 $\sigma_{2G} = \sigma_{1G}$. 由归纳假设，有 $q_0 \in G$ 使 $q_0 \Vdash^* \sigma_1 = \sigma_2$. 在滤子 G 中取出 $q \leq q_0$，$q \leq t$，这时有 $q \Vdash^* \sigma_1 = \sigma_2$ (见命题 2)，现由性质 2 得 $q \perp r$，但 q，$r \in G$，矛盾. 同样 r 不会具有性质 3.

因 D 的定义所涉及的对象都对 M 具有绝对性，所以 $D \in M$. 假如证明了 D 是稠的，则有 $D \cap G \neq 0$，这时便存在 $p \in G$ 且 p 只能具有性质 1，即 $p \Vdash^* \tau_1 = \tau_2$. 因此只用证 D 是稠的就可以了.

任取 $p \in P$. 假设 $p \Vdash^* \tau_1 = \tau_2$ 不成立(否则当然 $p \in D$). 这时由定义 2 (Ⅰ)，不妨设存在某个 $(\sigma_1, s) \in \tau_1$，使

$E_2 = \{q \leq p \mid q \leq s \rightarrow \exists(\sigma_2, t) \in \tau_2 (q \leq t \wedge q \Vdash^* \sigma_1 = \sigma_2)\}$

不在 p 下方稠，即存在 $r \leq p$ 使任何 $q \leq r$ 都有 $q \notin E_2$，于是有

$$\forall q \leq r(q \leq s \wedge \forall(\sigma_2, t) \in \in \tau_2(\neg(q \leq t \wedge q \Vdash^* \sigma_1 = \sigma_2))). \quad (4)$$

取 q 为 r，$r \leq s$. 这时可以验证 r 具有性质 2，于是 $r \in D$，从而证明了 D 是稠的.

为了验证 r 具有性质 2 只要验证对任意 $(\sigma_2, t) \in \tau_2$ 及 $q \in P$，当 $q \leq t$ 且 $q \Vdash^* \sigma_1 = \sigma_2$ 时，$q \perp r$ 便可. (反证)假设 q 与 r 有公共延伸 q_0，$q_0 \leq q \leq t$，$q_0 \leq r \leq s$. 由命题 2，$q_0 \Vdash^* \sigma_1 = \sigma_2$. q_0 的存在与 (4) 矛盾. 至此完成了对情形一的证明.

情形二 φ 为 $\tau_1 \in \tau_2$.

(→) 设 $p \in G$，$p \Vdash^* \tau_1 \in \tau_2$，则

$$D = \{q \mid \exists(\sigma, s) \in \tau_2 \ (q \leq s \wedge q \Vdash^* \sigma = \tau_1)\}$$

在 p 下方稠. 由 7.2 节命题 6 (Ⅱ) 知 $G\cap D\neq 0$. 取 $q\in G\cap D$, 故存在 $(\sigma, s)\in\tau_2$, $q\le s$ 且 $q\|\!-^*\ \sigma=\tau_1$. 由 $q\in G$ 及 $q\le s$ 得 $s\in G$ (G 是滤子), 由情形一得 $\sigma_G=\tau_{1G}$, 但 $\sigma_G\in\tau_{2G}$, 故 $\tau_{1G}\in\tau_{2G}$.

($\leftarrow$) 设 $\tau_{1G}\in\tau_{2G}$, 则存在 $s\in G$ 使 $(\sigma, s)\in\tau_2$ 且 $\sigma_G=\tau_{1G}$. 由情形一知存在 $r\in G$ 使 $r\|\!-^*\ \sigma=\tau_1$. 取 r, s 的公共延伸 $p\in G$. 于是由命题 2 得 $\forall q\le p(q\le s\ \wedge\ q\|\!-^*\ \sigma=\tau_1)$. 这是比 $p\|\!-^*\ \tau_1\in\tau_2$ 更强的条件(此时 $\{q\mid\exists(\sigma, s)\in\tau_2(q\le s\ \wedge\ q\|\!-^*\ \sigma=\tau_1)\}$ 当然在 p 下方稠). 这样便完成了对情形二的证明.

以下证明中, 对于可能含有量词的公式,“ $\|\!-^*$ ”并不一定是绝对的, 所以要考察对 M 的相对式. 以定义 2 (Ⅳ) 为例,

$$
\begin{aligned}
(p\|\!-^*\ \neg\varphi)^M &\leftrightarrow \neg\exists q\le p(q\|\!-^*\ \varphi)^M\\
&\leftrightarrow \forall q\le p\ \neg(q\|\!-^*\ \varphi)^M.
\end{aligned}
$$

情形三 设公式形为 $\neg\varphi$.

($\rightarrow$) 设 $p\in G$ 且 $(p\|\!-^*\ \neg\varphi)^M$, 要证 $\neg\varphi^{M[G]}$. (反证)假设 $\varphi^{M[G]}$, 则由归纳假设, $\exists q\in G$ 使 $(q\|\!-^*\ \varphi)^M$. 取 p, q 的公共延伸 $r\in G$, 则由命题 2 得 $(r\|\!-^*\ \varphi)^M$, 这与 $(p\|\!-^*\ \neg\varphi)^M$ 矛盾.

($\leftarrow$) 假设 $(\neg\varphi)^{M[G]}$, 要证 $\exists p\in G(p\|\!-^*\ \neg\varphi)^M$.

令 $D=\{p\in P\mid(p\|\!-^*\ \varphi)^M\ \vee\ (p\|\!-^*\ \neg\varphi)^M\}$. 因内涵公理在 M 中成立, 故 $D\in M$. D 是稠的. 如 D 不稠, 则对某个 $p\in P$, $\forall q\le p$, $q\notin D$. 由 D 的定义, 有 $\neg(q\|\!-^*\ \varphi)^M$ 且 $\neg(q\|\!-^*\ \neg\varphi)^M$. 由前者及定义 2 (Ⅳ) 知 $(p\|\!-^*\ \neg\varphi)^M$, 这与后者矛盾(注意命题 2).

既然 D 是稠的, 那么存在 $p\in D\cap G$. 这时或者 $(p\|\!-^*\ \neg\varphi)^M$, 或者 $(p\|\!-^*\ \varphi)^M$, 但后者不可能, 否则得出 $\varphi^{M[G]}$ 而与原假设矛盾. 至此完成了对情形三的证明.

情形四 设公式形为 $\varphi\ \wedge\ \psi$.

($\rightarrow$) 设 $p \in G$ 且 $(p \Vdash^* \varphi \wedge \psi)^M$, 则 $(p \Vdash^* \varphi)^M \wedge (p \Vdash^* \psi)^M$. 由归纳假设得 $\varphi^{M[G]}$, $\psi^{M[G]}$, 进而得 $(\varphi \wedge \psi)^{M[G]}$.

($\leftarrow$) 设 $(\varphi \wedge \psi)^{M[G]}$. 对 φ 和 ψ, 存在 $p, q \in G$,

$$(p \Vdash^* \varphi)^M, \ (q \Vdash^* \psi)^M.$$

取 p 与 q 的公共延伸 $r \in G$, 则有

$$(r \Vdash^* \varphi)^M, \ (r \Vdash^* \psi)^M, \ (r \Vdash^* \varphi \wedge \psi)^M.$$

情形五 设公式形为 $\exists x \, \varphi(x, \tau_1, \cdots, \tau_n)$, 简写为 $\exists x \varphi(x)$.

($\rightarrow$) 设 $p \in G$ 且 $(p \Vdash^* \exists x \varphi(x))^M$, 由定义 2 (V) 知集

$$\{q \mid \exists \sigma \in M(P)(q \Vdash^* \varphi(\sigma))^M\}(\in M)$$

在 p 下方稠. 由 7.2 节命题 6 (II) 知可取某个 $q \in G$ 及 $\sigma \in M(P)$ 使

$$(q \Vdash^* \varphi(\sigma))^M.$$

由归纳假设得 $\varphi^{M[G]}(\sigma_G)$,于是有

$$\exists x \in M[G] \varphi(x)^{M[G]}, \text{ 即} (\exists x \varphi(x))^{M[G]}.$$

($\leftarrow$) 设 $\exists x \in M[G](\varphi(x))^{M[G]}$, 这时有某个 $\sigma \in M(P)$ 使 $\varphi^{M[G]}(\sigma_G)$. 由归纳假设, 存在 $p \in G$, $(p \Vdash^* \varphi(\sigma))^M$. 于是

$$\forall q \leq p \ ((q \Vdash^* \varphi(\sigma))^M).$$

这时定义 2 (V) 中"下方稠"条件自然满足, 所以 $(p \Vdash^* \exists x \varphi(x))^M$ 成立.

证 毕

有了定理 1 , 立即可建立下面的重要结论.

定理 2 设 $\tau_1, \cdots, \tau_n \in M(P)$, 则

(I) $p \Vdash \varphi(\tau_1, \cdots, \tau_n) \leftrightarrow (p \Vdash^* \varphi(\tau_1, \cdots, \tau_n))^M$.

(II) $\varphi^{M[G]}(\tau_{1G}, \cdots, \tau_{nG}) \leftrightarrow \exists p \in G(p \Vdash \varphi(\tau_1, \cdots, \tau_n))$.

证明 (I) ($\leftarrow$) 为证 $p \Vdash \varphi$, 按定义, 要证当 $p \in G$ 时, 有 $\varphi^{M[G]}(\tau_{1G}, \cdots, \tau_{nG})$. 为此, 用定理 1 即可.

($\rightarrow$) 设 $p \Vdash \varphi(\tau_1, \cdots, \tau_n)$. 为证 $(p \Vdash^* \varphi(\tau_1, \cdots, \tau_n))^M$, 由命题 2 , 只用证集

$$\{r \mid (r \Vdash^* \varphi(\tau_1, \cdots, \tau_n))^M\}$$

在 p 下方稠. 假如该集不在 p 下方稠, 则有

$$\exists q \le p(\neg \exists r \le q(r \Vdash^* \varphi(\tau_1, \cdots, \tau_n))^M).$$

由定义 2 (Ⅳ) 知 $(q \Vdash^* \neg\varphi(\tau_1, \cdots, \tau_n))^M$. 由此及 (Ⅰ) $(\leftarrow)$ 得 $q \Vdash \neg\varphi(\tau_1, \cdots, \tau_n)$. 这时对 q 用 7.1 节命题 1, 可取 M 上 P 型滤子 G 使 $q \in G$. 由 $\Vdash$ 的定义可得 $(\neg\varphi(\tau_{1G}, \cdots, \tau_{nG}))^{M[G]}$. 但因 $p \ge q$, 故 $p \in G$, 从而又有 $(\varphi(\tau_{1G}, \cdots, \tau_{nG}))^{M[G]}$, 矛盾.

(Ⅱ) $(\leftarrow)$ 直接用 $\Vdash$ 的定义便可.

$(\rightarrow)$ $\varphi^{M[G]}(\tau_{1G}, \cdots, \tau_{nG})$

$\rightarrow \exists p \in G(p \Vdash^* \varphi(\tau_1, \cdots, \tau_n))^M$ (定理 1)

$\rightarrow \exists p \in G(p \Vdash \varphi(\tau_1, \cdots, \tau_n))$ (由 (Ⅰ))

证 毕

推论 1 设 $\sigma, \tau_1, \cdots, \tau_n \in M(P)$, 则

(Ⅰ) $\{p \in P \mid p \Vdash \varphi(\tau_1, \cdots, \tau_n) \vee p \Vdash \neg\varphi(\tau_1, \cdots, \tau_n)\}$ 是 P 的稠子集,

(Ⅱ) $p \Vdash \neg\varphi(\tau_1, \cdots, \tau_n) \leftrightarrow \neg\exists q \le p(q \Vdash \varphi(\tau_1, \cdots, \tau_n))$,

(Ⅲ) $p \Vdash \exists x\varphi(x, \tau_1, \cdots, \tau_n) \leftrightarrow \{q \le p \mid \exists \sigma \in M(P)(q \Vdash \varphi(\sigma, \tau_1, \cdots, \tau_n))\}$ 在 p 下方稠,

(Ⅳ) 若 $p \Vdash \exists x(x \in \sigma \wedge \varphi(x, \tau_1, \cdots, \tau_n))$, 则 $\exists \pi \in \mathrm{Dom}(\sigma)\, \exists q \le p(q \Vdash \varphi(\pi, \tau_1, \cdots, \tau_n))$.

证明 (Ⅰ) 在定理 1 证明的情形三 $(\leftarrow)$ 中已证集

$$D = \{p \mid (p \Vdash^* \varphi)^M \vee (p \Vdash^* \neg\varphi)^M\}$$

是稠的. 再用定理 2 (Ⅰ) 便可.

(Ⅱ) $p \Vdash \neg\varphi \leftrightarrow (p \Vdash^* \neg\varphi)^M$ (定理 2 (Ⅰ))

$\leftrightarrow (\neg\exists q \le p(q \Vdash^* \varphi))^M$ (定义 2 (Ⅳ))

$\leftrightarrow \neg\exists\, q \le p\, q \Vdash \varphi.$

(Ⅲ) $p \Vdash \exists x\varphi(x) \leftrightarrow (p \Vdash^* \exists x\varphi(x))^M$

$\leftrightarrow \{q \mid \exists \sigma \in V(P)(q \Vdash^* \varphi(\sigma))\}^M$ 在 p 下方稠 (定义 2 (Ⅴ))

$\leftrightarrow \ \{q \le p \mid \exists \sigma \in M(P)(q \Vdash \varphi(\sigma))\}$ 在 p 下方稠

(定理 2 (I))

(Ⅳ) 由 7.1 节命题 1 知可取 M 上 P 型滤子 G 使 $p \in G$. 由 $\Vdash$ 的定义, 存在 $\pi_G \in \sigma_G$ 且 $\varphi^{M[G]}(\pi_G, \tau_{1G}, \cdots, \tau_{nG})$. 于是 $\pi \in \mathrm{Dom}(\sigma)$, 且存在 $r \in G$, $r \Vdash \varphi(\pi, \tau_1, \cdots, \tau_n)$ (定理 2 (Ⅱ)). 再取 p 与 r 的公共延伸 $q \in G$, 便得

$$q \le p \text{ 且 } q \Vdash \varphi(\pi, \tau_1, \cdots, \tau_n).$$

证 毕

在 M 是 ZFC 的可递模型的假定之下, 现在可以证明, 用 M 上的 P 型滤子得到的扩张 $M[G]$ 也是 ZFC 的模型.

定理 3 $M[G]$ 是 ZFC 的模型.

证明 1° 外延公理在 $M[G]$ 中为真, 因为 $M[G]$ 是可递的(由 7.2 节命题 3 (Ⅲ) , 还要用 5.4 节命题 1).

2° 基础公理在 $M[G]$ 中为真, 见 5.4 节命题 3 .

3° 无序对公理的验证:

任取 $\sigma_G, \tau_G \in M[G]$. 因 $\sigma, \tau \in M(P)$, 故 $\{(\sigma, e), (\tau, e)\} \in M(P)$. 于是有 $\{\sigma_G, \tau_G\} = \{(\sigma, e), (\tau, e)\}_G \in M[G]$.

4° 并集公理的验证:

任取 $\tau_G \in M[G]$. 因 $\tau \in M(P)$, 令 $\pi = \cup\mathrm{Dom}(\tau)$, 则 $\pi \in M(P)$ (注意 $\cup$, Dom 对 M 的绝对性), 于是 $\pi_G \in M[G]$. 再任取 $\sigma_G \in \tau_G$. 因 $\sigma \in \mathrm{Dom}(\tau)$, 故有 $\sigma \subset \pi$ 和 $\sigma_G \subset \pi_G$. 这就证明了并集公理在 $M[G]$ 中为真:

$$\forall x \in M[G]\ \exists y \in M[G]\ \forall z \in x(z \subset y)^{M[G]},$$

$$(\forall x\ \exists y\ \forall z\ \forall t(t \in z \ \wedge\ z \in x \ \rightarrow\ t \in y))^{M[G]}$$

5° 内涵公理的验证:

对任意公式 $\varphi(x, s, z_1, \cdots, z_n)$ 和 $\sigma_G, \tau_{1G}, \cdots, \tau_{nG} \in M[G]$, 作

$$\rho = \{(\pi, p) \in \mathrm{Dom}(\sigma) \times P \mid p \Vdash (\pi \in \sigma \wedge \varphi(\pi, \sigma, \tau_1, \cdots, \tau_n))\}. \tag{5}$$

因 $\sigma, \tau_1, \cdots, \tau_n \in M(P)$，并考虑定理 2 (Ⅰ) $((p\Vdash \cdots) \leftrightarrow (p\Vdash^* \cdots)^M)$，便知 $\rho \in M(P)$. 下证 $\rho_G = y$，这里的 y 是

$$y = \{x \in \sigma_G \mid \varphi^{M[G]}(x, \sigma_G, \tau_{1G}, \cdots, \tau_{nG})\}.$$

任取 $\pi_G \in \rho_G$，则存在 $p \in G$，$(\pi, p) \in \rho$. 根据 ρ 的定义，有

$$p \Vdash \pi \in \sigma \ \wedge \ \varphi(\pi, \sigma, \tau_1, \cdots, \tau_n). \tag{6}$$

根据 $\Vdash$ 的定义又知

$$\pi_G \in \sigma_G \text{ 且 } \varphi^{M[G]}(\pi_G, \sigma_G, \tau_{1G}, \cdots, \tau_{nG}). \tag{7}$$

于是 $\pi_G \in y$. 这说明 $\rho_G \subset y$. 再设 $\pi_G \in y$，即 (7) 成立. 由定理 2 (Ⅱ) 知存在 $p \in G$ 使 (6) 成立. 于是由 ρ 的定义 (5) 知 $(\pi, p) \in \rho$，进而 $\pi_G \in \rho_G$. 至此我们有 $y = \rho_G$，从而证明了内涵公理在 $M[G]$ 中为真:

$$(\forall s z_1 \cdots z_n \, \exists y \forall x(x \in y \ \leftrightarrow \ x \in s \ \wedge$$
$$\wedge \ \varphi(x, s, z_1, \cdots, z_n)))^{M[G]}.$$

6° 替换公理的验证:

要验证的是 $(\forall z t_1 \cdots t_n(\forall x \in z \, \exists! y \varphi \rightarrow \exists t \forall x \in z \exists y \in t\varphi))^{M[G]}$，其中 φ 是任意公式 $\varphi(x, y, z, t_1, \cdots, t_n)$. 设 $\sigma_G, \tau_{1G}, \cdots, \tau_{nG} \in M[G]$，且假设

$$\forall x \in \sigma_G \exists! y \in M[G] \ \varphi^{M[G]}(x, y, \sigma_G, \tau_{1G}, \cdots, \tau_{nG}), \tag{8}$$

要证明存在 $\rho_G \in M[G]$，满足

$$\forall x \in \sigma_G \exists y \in \rho_G \ \varphi^{M[G]}(x, y, \sigma_G, \tau_{1G}, \cdots, \tau_{nG}), \tag{9}$$

为此，在 M 内应用反身定理(6.3 节推论 1，应用时要把结论取为对 M 的相对式)，可选择充分大的 $\alpha \in M$，使公式

$$\exists \tau \in M(\tau \in M(P) \ \wedge \ (p \Vdash^* \varphi(\pi, \tau, \sigma, \tau_1, \cdots, \tau_n))^M)$$

对 $(\mathrm{v}_\alpha \cap M, M)$ 为绝对. 再由 6.3 节命题 1 得

$$\exists \tau \in M(\tau \in M(P) \ \wedge \ (p \Vdash^* \varphi)^M)$$
$$\rightarrow \ \exists \tau \in \mathrm{v}_\alpha \cap M(\tau \in M(P) \ \wedge \ (p \Vdash^* \varphi)^M), \tag{10}$$

其中 φ 是 $\varphi(\pi, \tau, \sigma, \tau_1, \cdots, \tau_n)$ 的简写. 注意 $\mathrm{rank}(x)$ 的绝对性，有

$$\mathrm{v}_\alpha \cap M = \{x \in M \mid \mathrm{rank}(x) < \alpha\} \ \text{(由 3.4 节命题 2)}$$

$$= \mathrm{v}_\alpha^M \in M.$$

记 $u = \mathrm{v}_\alpha^M \cap M(P)(\in M)$，由定理 2 (Ⅰ) 及 (10) 可得

$$\exists\tau \in M(P)(p\Vdash\varphi) \rightarrow \exists\tau \in u(p\Vdash\varphi). \qquad (11)$$

令 $\rho = u \times \{e\}(\in M(P))$. 下证 ρ_G 满足条件 (9) .

任取 $\pi_G \in \sigma_G$，由假定 (8) 知存在 $\tau_G \in M[G]$，$\tau \in M(P)$，使

$$\varphi^{M[G]}(\pi_G, \tau_G, \sigma_G, \tau_{1G}, \cdots, \tau_{nG}).$$

用一次定理 2 (Ⅱ)，得

$$p \in G,\ p\Vdash\varphi(\pi, \tau, \sigma, \tau_1, \cdots, \tau_n).$$

由 (11) 得

$$\exists\tau \in u(p\Vdash\varphi(\pi, \tau, \sigma, \tau_1, \cdots, \tau_n)). \qquad (12)$$

于是存在 $\tau_G \in \rho_G$ 使 $\varphi^{M[G]}(\pi_G, \tau_G, \sigma_G, \tau_{1G}, \cdots, \tau_{nG})$ 成立 (又对 (12) 用一次定理 2 (Ⅱ)).

至此证明了 (9)，完成了对替换公理的验证.

7° 幂集公理的验证:

要证 $(\forall x\exists y\forall z(z \subset x \rightarrow z \in y))^{M[G]}$.

任取 $\sigma_G \in M[G]$. 作

$$u = \{\tau \in M(P) \mid \mathrm{Dom}(\tau) \subset \mathrm{Dom}(\sigma)\}$$
$$= \{\tau \in M \mid \tau \subset (\mathrm{Dom}(\sigma) \times P)\}$$
$$= (\mathcal{P}(\mathrm{Dom}(\sigma) \times P))^M \in M.$$

令 $\rho = u \times \{e\}(\in M(P))$，再任取 $\pi_G \subset \sigma_G$，只要证 $\pi_G \in \rho_G$ 便可. 令

$$\tau = \{(\mu, p) \mid \mu \in \mathrm{Dom}(\sigma) \wedge p\Vdash\mu \in \pi\},$$

τ 满足 $\mathrm{Dom}(\tau) \subset \mathrm{Dom}(\sigma)$，故 $\tau \in u$，$(\tau, e) \in \rho$，$\tau_G \in \rho_G$. 为证 $\pi_G \in \rho_G$，现证 $\pi_G = \tau_G$ 如下.

当 $\mu_G \in \pi_G$ 时，因 $\pi_G \subset \sigma_G$，故 $\mu_G \in \sigma_G$，$\mu \in \mathrm{Dom}(\sigma)$. 由定理 2 (Ⅱ) 知存在 $p \in G$ 使 $p\Vdash\mu \in \pi$. 于是 $(\mu, p) \in \tau$，$\mu_G \in \tau_G$.

当 $\mu_G \in \tau_G$ 时，存在 $p \in G$，$(\mu, p) \in \tau$，从而 $p\Vdash\mu \in \pi$.

再由定理 2 (II) 得 $\mu_G \in \pi_G$.

至此得 $\pi_G = \tau_G$，从而证明了 $\tau_G \subset \sigma_G \to \pi_G \in \rho_G$，完成了对幂集公理的验证.

8° 无限公理的验证:

以上已证 $M[G]$ 是 ZF− 无限公理的模型，所以 0 与后继函数对 $M[G]$ 是绝对的. 因 $\omega \in M$，故 $\omega(= (\breve{\omega})_G) \in M[G]$，且有

$$(0 \in \omega \ \wedge \ \forall y \in \omega(y' \in \omega))^{M[G]},$$

这就证明了无限公理在 $M[G]$ 中为真:

$$\exists x \in M[G](0 \in x \ \wedge \ \forall y \in x(y' \in x)).$$

9° 选择公理的验证:

任取 $\sigma_G \in M[G]$. 因 $\text{Dom}(\sigma) \in M$ 且选择公理在 M 中成立，我们可使 $\text{Dom}(\sigma)$ 建立良序，并设它的序型为 α. 于是 $\alpha \in M$，且把 $\text{Dom}(\sigma)$ 中的 P - 标用序数编上号，写成

$$\text{Dom}(\sigma) = \{\pi_\beta \mid \beta < \alpha\} \quad (\text{注意序型的绝对性}).$$

这时 $\sigma_G \subset \{\pi_{\beta G} \mid \beta < \alpha\}$. $\beta < \alpha$ 时，$<\breve{\beta}, \pi_\beta> \in M$ (符号见 7.2 节命题 7 前的规定). 记

$$\tau = \{<\breve{\beta}, \pi_\beta> \mid \beta < \alpha\} \times \{e\} \ (\in M(P))$$

由 7.2 节命题 7 及 $(\breve{\beta})_G = \beta$ 可得

$$\tau_G = \{<\breve{\beta}, \pi_\beta>_G \mid \beta < \alpha\} = \{(\beta, \pi_{\beta G}) \mid \beta < \alpha\}.$$

τ_G 是以 α 为定义域的函数，且 $\sigma_G \subset \text{Ran}(\tau_G)$. 至此，根据 4.4 节定理 5 便知选择公理在 $M[G]$ 中成立.

证 毕

我们可利用 $M[G]$ 所具有的一些新性质来建立各种相对无矛盾性结果. 其中较为简单的例子见练习三十题 2 .

练 习 三 十

1. 设 $\tau_1 = \{(\sigma_1, s)\}$，$\tau_2 = \{(\sigma_2, s)\}$，$s \in P$. 试证:

$$p \Vdash \tau_1 = \tau_2 \ \leftrightarrow \ \forall q \leq p(q \leq s \ \to \ q \Vdash \sigma_1 = \sigma_2)$$

2. 试证明: 若 ZFC 无矛盾, 则 ZFC $+(V \neq L)$ 也无矛盾.

7.4 拟不交族及可数反链条件

本节为证明 CH 的相对独立性再作些准备工作.

命题 1 **若集族 $\mathcal{A}$ 由不可数个基数为 n 的有限集构成, 则 $\mathcal{A}$ 存在不可数的子族 $\mathcal{B}$, 它具有性质:**

$$\cap\mathcal{B} \neq 0 \text{ 或 } \mathcal{B} \text{ 中集互不相交.}$$

证明 假定

$$\mathcal{A} \text{ 的任一不可数子族 } \mathcal{B} \text{ 都使 } \cap\mathcal{B} = 0 \tag{1}$$

在所有 $\mathcal{A}$ 的"成员互不相交"子族中, 取出某个极大"成员互不相交"子族作为 $\mathcal{B}^*$ (这里用了 Zorn 引理). 任取 $B \in \mathcal{B}^*$. B 中只有 n 个元素. 如果 $\mathcal{A}$ 中有不可数个集与 B 相交, 那么 B 的 n 个元素中至少有一个元素是 $\mathcal{A}$ 的某个不可数子族中所有集的公共元素, 与假定 (1) 矛盾. 由此得出结论: $\mathcal{A}$ 中至多有可数个集与 B 相交. 但因 $\mathcal{B}^*$ 是极大的, 故任一 $A \in \mathcal{A}$ 都和 $\mathcal{B}^*$ 的某个成员相交. 又因 $\mathcal{A}$ 是不可数的, 所以 $\mathcal{B}^*$ 也只能是不可数的.

证 毕

定义 1 (**拟不交族**)

集族 $\mathcal{A}$ 叫做拟不交族, 如果 $\mathcal{A}$ 具有性质: 存在集 r, 对任何 $a, b \in \mathcal{A}$, 当 $a \neq b$ 时, $a \cap b = r$. r 叫做拟不交族 $\mathcal{A}$ 的根.

定义毕

定理 1 **若集族 $\mathcal{A}$ 由不可数个有限集构成, 则存在 $\mathcal{A}$ 的不可数个成员形成 $\mathcal{A}$ 的拟不交子族.**

证明 不妨设 $\mathcal{A}$ 中成员(有限集)的基数都是 n. 事实上, 设 $\mathcal{A} = \cup_{n\in\omega}\mathcal{A}_n$, 其中 $\mathcal{A}_n$ 的成员的基数为 n, 那么必有某个 $\mathcal{A}_n$ 是不可数的, 用它代替 $\mathcal{A}$ 便可.

对 n 归纳证明不可数的拟不交子族的存在性.

$n=1$ 时，取 $\mathcal{B}=\mathcal{A}$ 便可，此时其根为 0．

$n>1$ 时，根据命题 1，可取 $\mathcal{A}$ 的不可数子族 $\mathcal{B}^*$ 使 $\cap\mathcal{B}^*\neq 0$ 或 $\mathcal{B}^*$ 中集互不相交. 若 $\mathcal{B}^*$ 中集互不相交，则即为所求，其根为 0．若 $\cap\mathcal{B}^*\neq 0$，则取出 $\mathcal{B}^*$ 中所有集的一个公共元素 b_1，取出 b_1 后对剩下的基数为 $n-1$ 的集的族用归纳假设，找出不可数个成员形成一拟不交子族，然后在根中加入 b_1，这样便得到 $\mathcal{B}^*$ 的(也是 $\mathcal{A}$ 的)不可数的拟不交子族.

证 毕

下面转入讨论另一个重要概念 —— 可数反链条件以及它与力迫法的关系. 在 7.1 节中定义过，若偏序集 P 中的所有反链都是可数集，则说 P 具有可数反链条件. $a(\subset P)$ 是 P 的反链，指 a 中任意二元素皆不相容，即在 P 中皆没有公共延伸.

如前，设 M 是 ZFC 的可数可递模型，$P\in M$，G 是 M 上 P 型滤子.

命题 2 设 $a,\ b\in M$ 且 $(P$有可数反链条件$)^M$. 对于 $M[G]$ 中的任一映射 $f:\ a\longrightarrow b$，一定存在 M 中的映射 $F:\ a\longrightarrow\mathcal{P}(b)$ 满足

$$\forall x\in a(f(x)\in F(x))\text{ 且 }\forall x\in a(|F(x)|\leq\omega)^M.$$

证明 因 $f\in M[G]$，可设 $f=\tau_G$，$\tau\in M(P)$. 已知

$$(\tau_G\text{是}(\breve{a})_G\text{到}(\breve{b})_G\text{的函数})^{M[G]},$$

故由 7.3 节定理 2 (Ⅱ) 知存在 $p\in G$ 使

$$p\Vdash\tau\text{ 是 }\breve{a}\text{ 到 }\breve{b}\text{ 的函数}. \tag{2}$$

对任意 $x\in a$，令

$$F(x)=\{y\in b\mid\exists q\leq p(q\Vdash\tau(\breve{x})=\breve{y})\}. \tag{3}$$

由 7.3 节定理 2 (Ⅰ) 有

$$q\Vdash\tau(\breve{x})=\breve{y}\ \leftrightarrow\ (q\Vdash^*\tau(\breve{x})=\breve{y})^M,$$

故 $F(x)$ 是在 M 内定义的，从而 $F\in M$.

任取 $x\in a$，记 $y=f(x)$，即 $\breve{y}_G=\tau_G(\breve{x}_G)$. 再用 7.3 节定理 2 (Ⅱ) 得 $\exists r\in G\ r\Vdash\tau(\breve{x})=(\breve{y})$.

因 p, $r \in G$, 故可在 G 中取 p 与 r 的公共延伸 $q(\in G)$ 满足

$$q \leq p \text{ 且 } q \Vdash \tau(\breve{x}) = \breve{y}. \text{ (用到 7.3 节命题 1 (I))} \tag{4}$$

于是由 (3) 得 $y = f(x) \in F(x)$(注意 $f(x) \in b$). 下证

$$(|F(x)| \leq \omega)^M.$$

作函数 $g: F(x) \longrightarrow P$, 作法是, 对任意 $y \in F(x)$, 按 $F(x)$ 的定义式 (3) 取满足 (4) 的某个 q 作为 $g(y)$. 于是

$$g(y) \leq p \text{ 且 } g(y) \Vdash \tau(\breve{x}) = (\breve{y}). \tag{5}$$

(g 的定义中在选取 q 时要用选择公理) g 的定义是在 M 内部进行的, 所涉及元素皆在 M 中, 故 $g \in M$.

我们断言 $\{g(y) \mid y \in F(x)\}$ 是 P 中的反链, 即对任意 y, $y_1 \in F(x)$, 当 $y_1 \neq y$ 时, $g(y) \perp g(y_1)$. 若非如此, 则 $g(y)$ 与 $g(y_1)$ 有公共延伸 $p_1 \leq g(y)$, $g(y_1)$, 这时由 7.1 节命题 1 知存在 M 上 P 型滤子 G_1 使 $p_1 \in G_1$, 同时有

$$g(y), g(y_1), p \in G_1. \text{ (滤子性质)} \tag{6}$$

在 $M[G_1]$ 中用 7.3 节定理 2 (II)(注意 (2)), 知 τ_{G_1} 是 a 到 b 的函数. 又由 (5) 知 $g(y) \Vdash \tau(\breve{x}) = \breve{y}$ 及 $g(y_1) \Vdash \tau(\breve{x}) = \breve{y}_1$, 进而由 (6) 对 G_1 应用 7.3 节定理 2 (II) 得 $\tau_{G_1}(x) = y$, $\tau_{G_1}(x) = y_1$, 这不可能.

已知在 M 中 P 具有可数反链条件, 故 $(|\{g(y) \mid y \in F(x)\}| \leq \omega)^M$, 进而 $(|F(x)| \leq \omega)^M$.

证 毕

定义 2 (保持共尾数)

$P(\in M)$ 保持共尾数, 指每当 G 是 M 上 P 型滤子且 $\gamma(\in M)$ 是极限序数时, 便有 $\mathrm{cf}(\gamma)^M = \mathrm{cf}(\gamma)^{M[G]}$.

定义毕

命题 3 若每当 $\kappa \in M$ 是正则不可数基数时便有

$$(\kappa\text{是正则的})^{M[G]},$$

则 P 保持共尾数.

证明 设 γ 是 M 的极限序数. 在 M 中, 令 $(\kappa = \mathrm{cf}(\gamma))^M$, 并

设 $f \in M$ 是从 κ 到 γ 的严格增的无界映射 (4.8 节命题 1). 在 M 中, κ 是正则的(4.8 节命题 4), 故当 $\kappa \geq \omega$ 时,$(\kappa是正则的)^{M[G]}$ 成立($\kappa = \omega$ 时用到 ω 的绝对性, $\kappa > \omega$ 时用到命题的已知条件). 再由 4.8 节命题 2 得

$$(\kappa = \mathrm{cf}(\kappa) = \mathrm{cf}(\gamma))^{M[G]}, \text{ 进而 } \mathrm{cf}(\gamma)^M = \mathrm{cf}(\gamma)^{M[G]}.$$

证 毕

定理 2 设 P 在 M 中有可数反链条件, 那么

(Ⅰ) P 保持共尾数,

(Ⅱ) P 保持基数: $\forall \alpha \in M((\alpha是基数)^M \leftrightarrow (\alpha是基数)^{M[G]}$.

证明 (Ⅰ) 假如 P 不保持共尾数, 那么由命题 3 知存在 $\kappa \in M$, $\kappa > \omega$, $(\kappa是正则的)^M$ 但 $(\kappa不是正则的)^{M[G]}$. 于是存在 $\alpha < \kappa$, 在 $M[G]$ 中 α 与 κ 共尾, 即存在从 α 到 κ 的无界映射 $f \in M[G]$. 这时可用命题 2 得 $F: \alpha \longrightarrow \mathcal{P}(\kappa)$, $F \in M$, 满足

$$\forall x \in \alpha(f(x) \in F(x)), \forall x \in \alpha(|F(x)| \leq \omega)^M.$$

令 $s = \cup_{x<\alpha} F(x)$, 则 $s \in M$, 且因 $f[\alpha] \subset s$, 故 s 是 κ 的无界子集. 这时 s 或 $|s|$ 当然与 κ 共尾. κ 在 M 中的正则性要求 $\kappa = \mathrm{cf}(\kappa)$; 而 $\mathrm{cf}(\kappa)$ 的最小性要求 $\kappa \leq |s|$. 但由 s 的定义及 4.6 节命题 3 知 $|s| \leq |\alpha| < \kappa$, 矛盾.

(Ⅱ) 若 $\alpha \in M$ 是 $M[G]$ 的基数, 则 α 自动是 M 的基数; 因为 M 中的从比 α 小的任一序数到 α 的双射也是 $M[G]$ 中的双射, 而这种双射在 $M[G]$ 中因 α 是 $M[G]$ 中的基数而不存在.

注意 ω 的绝对性, 现只须证明

$$\forall \alpha \in M((\alpha > \omega \wedge (\alpha是基数)^M) \rightarrow (\alpha是基数)^{M[G]}).$$

首先, 若 α 是 M 的后继基数从而在 M 中是正则的(4.8 节命题 8), 则由 (Ⅰ) 知 $\mathrm{cf}(\alpha)^{M[G]} = \mathrm{cf}(\alpha)^M = \alpha$, 故 α 也是 $M[G]$ 的正则基数(4.8 节命题 5). 剩下的情形, 若 $\alpha > \omega$ 是 M 的极限基数, 则在 M 中有

$$\alpha = \omega_\gamma = \cup_{\beta<\gamma}\omega_\beta. \qquad (\gamma \text{ 是极限序数})$$

这说明 M 的正则基数在 α 中无界: $\forall \delta \in \alpha$, $\exists \beta < \gamma$ 使 $\delta < \omega_\beta$

及 ω_β^+. 上面已证这些正则基数在 $M[G]$ 中仍是正则基数. 于是对任意 $\delta < \alpha$, 存在基数 $\kappa \subset \alpha$ 使 $\delta < \kappa$. 这时在 $M[G]$ 中不会有 $\delta \approx \alpha$(否则导致 $\delta \approx \kappa$), 所以 α 是 $M[G]$ 中的基数.

证 毕

7.5 连续统假设相对于ZFC的独立性

为证 CH 相对于 ZFC 的独立性, 我们要用力迫法来构造 ZFC + ¬CH 的模型.

设 M 是 ZFC 的可数可递模型. 我们需要选用一种特殊的偏序集.

定义 1 (有限偏函数偏序集 Fn)

任取 $x, y \in M$. 从 x 到 y 的有限偏函数的全体记作 $\mathrm{Fn}(x, y)$:

$$\mathrm{Fn}(x, y) = \{p \mid |p| < \omega \wedge p\text{是函数} \wedge \mathrm{Dom}(p) \subset x \wedge \wedge \mathrm{Ran}(p) \subset y\}.$$

在 $\mathrm{Fn}(x, y)$ 中规定偏序为: $p \leq q \leftrightarrow p \supset q$.

定义毕

当 $x = \omega$, $y = 2$ 时的特例 $\mathrm{Fn}(\omega, 2)$ 见练习二十八题 2 .

空函数 0 是 $\mathrm{Fn}(x, y)$ 中的最大元: $e = 0$.

因 Fn 是用绝对的概念定义的, 故当 $x, y \in M$ 时,

$$\mathrm{Fn}(x, y) = (\mathrm{Fn}(x, y))^M \in M.$$

命题 1 设 $x, y \in M$, x 是无限集, $y \neq 0$, G 是 M 上的 $\mathrm{Fn}(x, y)$ 型滤子, 则 $\cup G$ 是 x 到 y 的满射.

证明 首先, 因 G 是滤子, G 中成员两两相容, 故 $\cup G$ 是函数. 对每个 $i \in x$, 作

$$D_i = \{p \in \mathrm{Fn}(x, y) \mid i \in \mathrm{Dom}(p)\}.$$

因 $y \neq 0$, 故每个 D_i 都是稠的. 事实上, 每个函数 $p \in \mathrm{Fn}(x, y)$ 都可把定义域扩大为包含 i 而延伸到 D_i 中. 由 D_i 的绝对性, 当

$x, y \in M$ 时 $D_i = D_i^M \in M$. 所以对于 M 上的 $\mathrm{Fn}(x, y)$ 型滤子 G, $G \cap D_i \neq 0$. 这说明 $\mathrm{Dom}(\cup G) = x$.

当 x 是无限集时, 对每个 $i \in y$, $\{p \in \mathrm{Fn}(x, y) \mid i \in \mathrm{Ran}(p)\}$ 是稠的. 类似的讨论得 $\mathrm{Ran}(\cup G) = y$.

证 毕

我们要选择特殊的 x 和 y, 希望产生出 CH 在其中为假的模型.

定理 1 设 $\kappa \in M$ 且 G 是 M 上 $\mathrm{Fn}(\kappa \times \omega, 2)$ 型滤子, 则

$$(2^\omega \geq |\kappa|)^{M[G]}.$$

证明 由命题 1, $\cup G$ 是 $\kappa \times \omega$ 到 2 的满射. 由 $G \in M[G]$ 知 $\cup G \in M[G]$. 考察函数列 $f_\alpha : w \longrightarrow 2, \alpha \in \kappa$,其中 f_α 是用 $\cup G$ 规定的:

$$f_\alpha(n) = (\cup G)(\alpha, n).$$

再由这些 f_α 用 $g(\alpha) = f_\alpha$ 来定义映射 $g: \kappa \longrightarrow {}^\omega 2$. 由所涉及概念的绝对性, $g \in M[G]$. 现证 g 是单射. 设 $\alpha \neq \beta$, 并记

$$D_{\alpha\beta} = \{p \in \mathrm{Fn}(\kappa \times \omega, 2) \mid \exists n \in \omega((\alpha, n) \in \mathrm{Dom}(p) \wedge \\ \wedge (\beta, n) \in \mathrm{Dom}(p) \wedge p(\alpha, n) \neq p(\beta, n))\}.$$

因任一 $p \in \mathrm{Fn}(\kappa \times \omega, 2)$ 可被扩大定义域而延伸到 $D_{\alpha\beta}$ 中, 故 $D_{\alpha\beta}$ 是稠的且 $D_{\alpha\beta} \in M$. 于是 $G \cap D_{\alpha\beta} \neq 0$, 即对任意 $\alpha, \beta \in \kappa$, 存在 $p \in G$, 且存在 $n \in \omega$ 使 $p(\alpha, n) \neq p(\beta, n)$, 而 $f_\alpha(n) = p(\alpha, n)$, $f_\beta(n) = p(\beta, n)$, 这导致 $f_\alpha \neq f_\beta$. g 的单射性说明 $(|\kappa| \leq 2^\omega)^{M[G]}$.

证 毕

至此我们似乎已经证明了 CH 在 $M[G]$ 中为假. 例如, 取 $\kappa = (\omega_2)^M$, 似乎由定理 1 得出 $2^\omega \geq \omega_2$ 在 $M[G]$ 中为真. 但事实上还不能立即作出 CH 在 $M[G]$ 中为假的断言. 这是因为基数的概念是相对的. 问题是: $(\omega_2)^M = (\omega_2)^{M[G]}$ 是否成立?

命题 2 对任意集 a, $\mathrm{Fn}(a, 2)$ 有可数反链条件.

证明 只用考虑 $\mathrm{Fn}(a, 2)$ 为不可数情形. 在 $\mathrm{Fn}(a, 2)$ 中任取 ω_1 个成员 p_α, $\alpha < \omega_1$. 我们证明 $\{p_\alpha \mid \alpha < \omega_1\}$ 不成反链, 从而 $\mathrm{Fn}(a, 2)$ 的反链一定可数.

记 $D_\alpha = \mathrm{Dom}(p_\alpha)$. 因 $|p_\alpha| < \omega$, 故每个 D_α 都是有限集. 根据 7.4 节定理 1 , 一定存在不可数的拟不交子族 $\{D_\alpha \mid \alpha \in b\}$(其中 $b \subset \omega_1$ 是不可数集). 设该族的根为 r (是有限集). 因 ${}^r2$ 是有限集, 故只有有限种可能不同的 $p_\alpha \lceil r$, 于是存在不可数的 $c \subset b$, 使 $\{p_\alpha \mid \alpha \in c\}$ 中的每个 p_α 都有相同的 $p_\alpha \lceil r$, 从而这些 p_α 都是相容的. 这就证明了 $\{p_\alpha \mid \alpha < \omega_1\}$ 不会是反链.

证 毕

取 $P = \mathrm{Fn}(\omega_2^M \times \omega, 2)$. 由命题 2 , P 有可数反链条件. 由 7.4 节定理 2 (Ⅱ) , $\omega_2^M = \omega_2^{M[G]}$. 再由定理 1 得 $(2^\omega \geq \omega_2)^{M[G]}$. 这样, 对这个 P, 当 G 是 M 上的 P 型滤子时, $M[G]$ 就成了 $\neg\mathrm{CH}$ 的模型, 即连续统假设在 $M[G]$ 中为假.

下面把所得结果稍作拓广.

定义 2 (P - 标 σ 的子集标)

设 $\sigma \in \mathrm{V}(P)$. σ 的子集标 τ 指如下形式的 P - 标:

$\tau = \cup\{\{\pi\} \times a_\pi \mid \pi \in \mathrm{Dom}(\sigma)\}$, 其中每个 a_π 都是 P 中反链.

定义毕

命题 3 设 $P \in M$, σ, $\rho \in M(P)$, 则存在 σ 的子集标 $\tau \in M(P)$ 使

$$e \Vdash (\rho \subset \sigma \ \rightarrow \ \rho = \tau).$$

证明 任取 $\pi \in \mathrm{Dom}(\sigma)$. 作

$$\mathcal{A} = \{a \in M \mid a\text{是}P\text{中反链且}\forall p \in a\ (p \Vdash \pi \in \rho)\}.$$

在 M 中对 $\mathcal{A}$ 用 Zorn 引理, 取出 $\mathcal{A}$ 中(关于 $\subset$) 的极大元 a_π. 令

$$\tau = \cup\{\{\pi\} \times a_\pi \mid \pi \in \mathrm{Dom}(\sigma)\} \text{ (注意 } \tau \text{ 与 } \rho \text{ 有关)}$$

则 $\tau \in M(P)$. 下面从 $\Vdash$ 的定义(7.3 节定义 1)出发来证明 $e \Vdash \rho \subset \sigma \rightarrow \rho = \tau$. 为此, 对 M 上任一 P 型滤子 G, 要证

$\rho_G \subset \sigma_G \ \rightarrow \ \rho_G = \tau_G$.

假设 $\rho_G \subset \sigma_G$. 任取 $\pi_G \in \rho_G$, 则 $\pi_G \in \sigma_G$, $\pi \in \mathrm{Dom}(\sigma)$. 这时必有 $a_\pi \cap G \neq 0$(假如 $a_\pi \cap G = 0$, 由 7.2 节命题 6 (I) 知存在 $q \in G$ 使 $\forall p \in a_\pi(p \perp q)$. 因 $\pi_G \in \rho_G$, 故可取 $q_1 \in G$ 使 $q_1 \Vdash \pi \in \rho$. 再取 q 与 q_1 的公共延伸 r , 则有 $\forall p \in a_\pi(p \perp r)$ 且 $r \Vdash \pi \in \rho$, 于是 $a_\pi \cup \{r\} \in \mathcal{A}$, 与 a_π 的极大性矛盾). 取 $p \in a_\pi \cap G$, 则 $(\pi, p) \in \tau$ 且 $p \in G$. 这说明 $\pi_G \in \tau_G$.

再任取 $\pi_G \in \tau_G$, 则存在 $p \in G$ 使 $(\pi, p) \in \tau$, 而由 τ 的定义知 $p \in a_\pi$, 进而由 a_π 与 $\mathcal{A}$ 的定义知 $p \Vdash \pi \in \rho$, 于是 $\pi_G \in \rho_G$. 这就证明了 $\rho_G = \tau_G$.

证 毕

命题 4 设 $P \in M$, $(P$有可数反链条件$)^M$, $(|P| = \kappa \geq \omega)^M$, 且 $(\mu = \kappa^\lambda)^M$, 其中 λ 是 M 中的超限基数(即 $\lambda \geq \omega$), 则在 $M[G]$ 中 $2^\lambda \leq \mu$.

证明 在 M 中, P 的每个反链都可数, 都可视为 ${}^\omega P$ 的成员, 故 P 至多有 κ^ω 个反链. 因 $\breve{\lambda} = \{(\breve{\alpha}, e) \mid \alpha \in \lambda\}$(7.2 节定义 2), 故

$$\mathrm{Dom}(\breve{\lambda}) = \{\breve{\alpha} \mid \alpha < \lambda\}, \quad |\mathrm{Dom}(\breve{\lambda})| = \lambda.$$

$\lambda \in M$, 故 $\breve{\lambda} \in M(P)$(7.2 节命题 3 (I)). 按子集标的定义, $\breve{\lambda}$ 的子集标至多有 $(\kappa^\omega)^\lambda = \kappa^\lambda = \mu$ 个. 设 $\{\tau_\alpha \mid \alpha < \mu\}$ 在 M 中枚举了 $\breve{\lambda}$ 的所有子集标. 记 $\pi = \{(<\breve{\alpha}, \tau_\alpha>, e) \mid \alpha < \mu\}$, $\pi \in M(P)$. 这时有

$$\begin{aligned}\pi_G &= \{<\breve{\alpha}, \tau_\alpha>_G \mid \alpha < \mu\} \\ &= \{(\alpha, \tau_{\alpha G}) \mid \alpha < \mu\} \ \text{(7.2 节命题 7)}\end{aligned}$$

π_G 本身是函数 $f: \mu \longrightarrow M[G]$, $f(\alpha) = \tau_{\alpha G}$, $\mathrm{Ran}(f) = \{\tau_{\alpha G} \mid \alpha < \mu\}$. 在 $M[G]$ 中, 任取 $\rho_G \subset (\breve{\lambda})_G = \lambda$. 由命题 3 可知存在 $\breve{\lambda}$ 的子集标 τ_α 使 $\rho_G = \tau_{\alpha G} \in \mathrm{Ran}(f)$. 这说明

$$\mathcal{P}(\lambda)^{M[G]} \subset \mathrm{Ran}(f), \text{ 进而 } (2^\lambda \leq \mu)^{M[G]}.$$

证 毕

把定理 1 和命题 4 结合起来，我们得到:

定理 2 设 $P = \mathrm{Fn}(\kappa \times \omega, 2)$，其中 κ 是 M 中的无限基数且使 $(\kappa = \kappa^{\omega})^M$，则对 M 上的 P 型滤子 G，$(2^{\omega} = \kappa)^{M[G]}$.

证明 因 P 有可数反链条件，故 M 中的基数在 $M[G]$ 中仍然是基数(7.4 节定理 2 (II)). 由定理 1 得 $(2^{\omega} \geq \kappa)^{M[G]}$. 又因在 M 中 κ 的有限子集共有 κ 个，故 $|P| = \kappa$. 在命题 4 中取 $\mu = \kappa$，$\lambda = \omega$，则有 $(2^{\omega} \leq \kappa)^{M[G]}$.

证 毕

命题 5 ZF+(V=L)+AC+GCH 的任意有限片断都存在可数可递模型.

证明 记 S = ZF+(V=L)+AC+GCH.

设 $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ 是 S 中的任意有限条公理. 根据 6.3 推论 5，有

(*) $S \vdash \exists M(|M| = \omega \ \wedge \ M$ 是可递集 $\wedge \ \varphi_1^M \ \wedge \ \cdots \ \wedge \ \varphi_n^M)$.

基于 ZF 已证 L 是 S 的模型(见 6.6 节定理 1，6.7 节推论 1，6.8 节定理 1). 应用 5.2 节中可靠性定理推论便知 (*) 的右端公式在 L 中为真:

$\exists M \in \mathrm{L}(|M| = \omega \ \wedge \ M$ 是可递集 $\wedge \ \varphi_1^M \ \wedge \ \cdots \ \wedge \ \varphi_n^M)^{\mathrm{L}}$.

下证该式在 V 中也为真:

(**) $\exists M(|M| = \omega \ \wedge \ M$ 是可递集 $\wedge \ \varphi_1^M \ \wedge \ \cdots \ \wedge \ \varphi_n^M)$.

事实上，

$(|M| = \omega)^{\mathrm{L}} \ \leftrightarrow \ \exists f \in \mathrm{L}(f$ 是 ω 到 M 的双射$)^{\mathrm{L}}$

$\qquad\qquad \rightarrow \ \exists f(f$ 是 ω 到 M 的双射) (双射的绝对性)

$\qquad\qquad \rightarrow \ |M| = \omega$,

$(M$是可递集$)^{\mathrm{L}} \rightarrow M$ 是可递集. (可递集的绝对性)

最后，因 L 是可递类且 $M \in \mathrm{L}$，故 $M \cap \mathrm{L} = M$，所以

$$(\varphi_1^M \ \wedge \cdots \wedge \ \varphi_n^M)^{\mathrm{L}} \ \rightarrow \ \varphi_1^M \ \wedge \cdots \wedge \ \varphi_n^M.$$

(**)在 V 中为真，意为 $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ 存在可数可递模型.

证 毕

根据命题 5 ，我们可按照需要取出 ZFC+GCH 充分大有限片断的可数可递集模型 M ，使广义连续统假设在 M 中成立. 把 M 取定，由这个 M 出发，可按本节中所讨论的方法，取偏序集 $P=\mathrm{Fn}(\kappa\times\omega,2)$，其中 κ 为某个无限基数. 取定 κ，有了 P ，便可得到扩张模型 $M[G]$，在 $M[G]$ 中连续统假设 CH(及GCH)并不成立. 一句话：可使 GCH 在 M 中成立但在 $M[G]$ 中不成立.

现在我们来到了目的地.

定理 3 若 ZFC 无矛盾，则 ZFC $+(2^\omega=\omega_2)$ 也无矛盾.

证明 按命题 5 ，取定 ZFC(充分大有限片断)的可数可递集模型 M ，使 GCH 在 M 中成立. 因在 M 中有

$$\omega<\omega_2=\mathrm{cf}(\omega_2),\qquad (4.8\text{ 节命题 8 })$$

故由 4.8 节定理 2 (Ⅲ) (此定理在证明中用到 GCH)知

$$(\omega_2=\omega_2^\omega)^M. \tag{1}$$

取 M 中基数 $\kappa=\omega_2$ ，应用定理 2 便得

$$(2^\omega=\omega_2)^{M[G]}. \tag{2}$$

其中 G 是 M 上的 P 型滤子. 结合 7.3 节定理 3 知 ZFC $+(2^\omega=\omega_2)$ 的任何有限片断皆有 $M[G]$ 为模型. 按照 5.2 节引理 1 ，便由 ZFC 无矛盾推出 ZFC $+(2^\omega=\omega_2)$ 也无矛盾.

证 毕

从上面的证明中可见，在应用定理 2 时，我们若改取 $\kappa=(\omega_{723})^M$(723 这个数是随意取的)或取 $\kappa=(\omega_{\omega_1})^M$ ，则 (1) 变为

$$(\omega_{723}=\omega_{723}^\omega)^M \text{ 或 } (\omega_{\omega_1}=\omega_{\omega_1}^\omega)^M(\text{后者用 4.8 节命题 6 })$$

应用定理 2 ，则 (2) 变为:

$$(2^\omega=\omega_{723})^{M[G]} \text{ 或 } (2_\omega=\omega_{\omega_1})^{M[G]},$$

进而知若 ZFC 无矛盾，则 ZFC $+(2^\omega=\omega_{723})$ 或 ZFC $+(2^\omega=\omega_{\omega_1})$ 都无矛盾.

按连续统假设，$2^\omega=\omega_1$. 而我们现在可以基于 ZFC 来构造 ZFC 的各种模型，在这些模型中 2^ω 可分别取不同的值，如

ω_1, ω_2, ω_{723}, ω_{ω_1}, $\cdots$ 等等. 这就证明了连续统假设 CH 对 ZFC 的相对独立性. 总之, 从 ZFC 公理系统出发既不能肯定 CH, 也不能否定它. 实数究竟有多少? 直线上的点究竟有多少? 按现有集论的基数理论无法给出明确回答. 这一事实说明问题本身的复杂与深刻, 说明现有集论中得到的关于实无限的认识只是初步的.

连续统问题是对人类智慧具有挑战性的问题. 它的复杂性与深刻性来源于现实世界, 来源于物质存在的连续性与离散性这一矛盾之中.

关于连续统问题的研究在很大程度上支配了集论过去的发展. 今后人们将会在这个课题上继续顽强地进行新探索.

参 考 书 目

关于集论基础知识, 可参阅:

[1] Enderton H B. *Elements of Set Theory*. Academic Press, Inc, 1977

关于逻辑的基础知识, 可参阅:

[2] 汪芳庭. 数理逻辑. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 1990: 1 – 138

进一步读物:

[3] Kunen K. *Set Theory, An Introduction to Independence Proofs* (Second Reprint). North – Holland Publishing Company, Amsterdam. 1989

练习提示或解答

练习一

1. (Ⅱ) 具有命题 1 中的性质.

练习二

1. $\{a, b, c, d, e, f\}$　　2. $\{a\}$　　3. a　　4. b

5. a　　6. $\{\phi, \{\phi\}\}$

7. $\{\phi, \{\phi\}, \{\{\phi\}\}, \{\phi, \{\phi\}\}\}$

8. 共 16 个元素　　9. $\{\phi, \{\phi\}\}$　　10. $\{\phi, \{\phi\}\}$

练习三

1. 2^{mn} 个

2. 是. $f\lceil\phi = \phi$, $f\lceil\{\phi\} = \{(\phi, \{\phi, \{\phi\}\})\}$, $f\lceil\{\phi, \{\phi\}\} = f$

3. 64 个关系, 8 个映射, 6 个满射, 没有单射

4. ${}^{a}a$ 有 27 个元素, ${}^{\phi}a = \{\phi\}$, ${}^{a}\phi = \phi$

练习四

1. 共 3 个　　2. 共 19 个, 其中全序有 6 个

3. 设 $<_a$ 为 a 中的良序. 在 b 中定义序 $<_b$ 如下. $\forall y_1, y_2 \in b$, 设 $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$. 令 $y_1 <_b y_2 \leftrightarrow x_1 <_a x_2$. 易知 $<_b$ 为 b 中良序, 且 f 为保序双射

4. 用超限归纳法

练习五

1. $\beta < \alpha' = \alpha \cup \{\alpha\} \ \rightarrow\ \beta = \alpha \ \vee\ \beta \in \alpha$

$\rightarrow$ 不可能有 $\alpha < \beta$

2. $\beta \in \cup\alpha' \ \rightarrow\ \beta \in \gamma \in \alpha'$

$\rightarrow\ \beta \in \gamma \in \alpha \ \vee\ \beta \in \gamma = \alpha \ \rightarrow\ \beta \in \alpha$

$\beta \in \alpha \ \rightarrow\ \beta \in \alpha \in \{\alpha\} \ \rightarrow\ \beta \in \alpha \in \alpha' \ \rightarrow\ \beta \in \cup\alpha'$

3. $\gamma \in \beta \rightarrow \gamma \in \gamma' \in \{\alpha' \mid \alpha \in \beta\} \rightarrow \gamma \in \cup\{\alpha' \mid \alpha \in \beta\}$;

$\gamma \in \cup\{\alpha' \mid \alpha \in \beta\} \ \rightarrow\ \gamma \in \alpha' \ \wedge\ \alpha \in \beta$

$\rightarrow\ \gamma \in \alpha \in \beta \ \vee\ \gamma = \alpha \in \beta \ \rightarrow\ \gamma \in \beta$

4. $\cap a$ 由序数组成, 由定理 1 知是 $\in$ - 良序集, 且易知是可递集. 记 $\beta = \min a$. $\cap a \subset \beta \ \rightarrow\ \cap a \leq \beta \ \rightarrow\ \cap a = \beta$

($\cap a < \beta \ \rightarrow\ \cap a < a$ 的每个元素 $\rightarrow\ \cap a \in \cap a$, 矛盾)

练习六

1. 4 2. 0 3. $\{\{1, 2\}, \{1\}, \{1, 0\}\}, 0, 3, 0, 0, \{1\}$

4. 4, 0, 3, 0, 0, 0

练习七

1. 用 (ZF 7)

2. 由定理 1, $\exists! \alpha a \sim \alpha$, 于是 $a' \sim \alpha'$, $\alpha \neq \alpha'$

3. 例如, 在 ω 中规定: 当 $n \neq 0$ 时令 $n <_1 0$; 其余情形令 $<_1$ 与 $\in$ 同. 于是 $(\omega, <_1)$ 的序型为 ω'

练习八

1. 在定理 3 中取 $\delta = \omega$, 并规定: $G : \mathrm{V} \longrightarrow \mathrm{V}$ 为

$$G(x) = \begin{cases} c & x = 0 \\ h(n,\ x(n)) & x \text{ 是以 } n' \text{ 为定义域并在 } \omega \text{ 中取值的函数} \\ 0 & x \text{ 为其他集} \end{cases}$$

2. 在定理 3 中取 $\delta = \omega$, 并规定 G: $\mathrm{V} \longrightarrow \mathrm{V}$ 为

$$G(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 2 & x \text{ 是定义域为 } 1 \text{ 的函数} \\ x(n) + x(n') & x \text{ 是定义域为 } n'' \text{ 的函数} \\ 0 & x \text{ 为基他集} \end{cases}$$

练习九

1. 对 γ 归纳　　2. 对 γ 归纳

3. 将 $(\alpha \times \{0\} \cup \beta \times \{1\}, <)$ 的序型用 $\alpha \oplus \beta$ 表示, 之后证明

$$\alpha \oplus 0 = \alpha$$
$$\alpha \oplus \beta' = (\alpha \oplus \beta)'$$
$$\alpha \oplus \beta = \cup\{\alpha + \gamma \mid \gamma < \beta\}, \text{当 } \beta \text{ 为极限序数时}$$

由唯一性可得 $\alpha \oplus \beta = \alpha + \beta$

4. 记 $(\beta \times \alpha, <)$ 的序型为 $\alpha \odot \beta$, 后证

$$\alpha \odot 0 = 0$$
$$\alpha \odot \beta' = \alpha \odot \beta + \alpha$$
$$\alpha \odot \beta = \cup\{\alpha \odot \gamma \mid \gamma < \beta\}, \text{当 } \beta \text{ 为极限序数时}$$

练习十

1. $y, z \in \{y, z\} \in \{\{y\}, \{y, z\}\} = (y, z) \in x$

2. 用 3.4 节命题 2

3. (Ⅰ) $y \subset x \rightarrow y \in \mathrm{V}_{\alpha+1}$

(Ⅱ) $s, t \in x \rightarrow (s, t) \in \mathrm{V}_{\alpha+2}$

4. 用反证法证明 $b = \{x \in a \mid x \notin \mathrm{WF}\} = 0$. 用到 3.4 节命题 4

练习十一

1. 若 $a\times b\in a$，取 $b_0\in b$，则有

$$a\times b\in\{a\times b\}\in\{\{a\times b\},\ \{a\times b,\ b_0\}\}=(a\times b,\ b_0)\in$$

$a\times b$, $\cdots$

用 3.4 节命题 4 (Ⅱ)

2. (Ⅰ) 对 n 归纳证明 $\cup^n a\subset b$

(Ⅱ) 由 (Ⅰ)，取 $b=a$

(Ⅲ) 由 (Ⅰ)，取 $b=\mathrm{cl}(a)$

(Ⅳ) 由 (Ⅰ)，取 $b=a\cup(\cup_{x\in a}\mathrm{cl}(x))$，还要用 (Ⅲ)

3. $(\omega+3)\cup\{\{1\},\ \{\omega\},\ \{\omega+2\},\ \{\{\omega\}\}\}$

练习十二

1. 仿 4.1 节命题 1 证明

2. $\forall x\in\mathcal{P}(a)$ 令 $g(x)=f[x]$，可得 $\mathcal{P}(a)$ 到 $\mathcal{P}(b)$ 的双射. 其中 f 是 a 到 b 的某一双射

3. 实数可用有理数集 Q 的分割定义，每个实数是 Q 的一个子集，所以有 $\mathrm{R}\subset\mathcal{P}(Q)\approx\mathcal{P}(\omega)$. 这就得到 $\mathrm{R}\lesssim\mathcal{P}(\omega)$.

再证 $\mathcal{P}(\omega)\lesssim\mathrm{R}$，设法建立单射 f：$\mathcal{P}(\omega)\longrightarrow\mathrm{R}$. 任取 $a\subset\omega$，令

$$f(a)=a_0+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\cdots=a_0\cdot a_1a_2\cdots,$$

其中当 $n\in a$ 时 $a_n=1$，当 $n\notin a$ 时 $a_n=0$. 因 a_n 是 0 或 1，故易证 f 是单射

4. 所需要的双射 f：$\mathcal{P}(\omega)\longrightarrow{}^{\omega}2$ 如下规定.

$\forall a\in\mathcal{P}(\omega)$，令 $f(a)=\chi_a(\in{}^{\omega}2)$，其中 χ_a 为 a 的特征函数：当 $n\in a$ 时 $\chi_a(n)=1$；当 $n\notin a$ 时 $\chi_a(n)=0$

练习十三

1. $\omega\cdot 2=\cup\{\omega+n\mid n\in\omega\}=\{0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ \omega,\ \omega+1,\ \omega+2,\ \cdots\}$. 令 $f(n)=2n+1$，$f(\omega+n)=2n$，便得双射 f：$\omega\cdot 2\longrightarrow\omega$

2. $\omega^2 = \omega \cdot \omega = \bigcup\{\omega \cdot k \mid k \in \omega\} = \{\omega \cdot m + n \mid m, n \in \omega\}$ 令 $f(\omega \cdot m + n) = (m, n)$，得双射 $f: \omega^2 \longrightarrow \omega \times \omega$

3. 对 α 归纳

4. (反证) 若 $\kappa(> \omega)$ 是后继序数，设为 $\alpha + 1$，则 $\alpha \in \kappa$，但 $\alpha \approx \kappa$，与 κ 是基数矛盾. $\alpha \approx \kappa$，是因为可建立双射 $f: \alpha + 1 \longrightarrow \alpha$，

$$f(\beta) = \begin{cases} 0 & \beta = \alpha \\ \beta & \omega \leq \beta < \alpha \\ \beta + 1 & \beta < \omega \end{cases}$$

练习十四

1. 利用 4.2 节命题 1

2. 对 n 归纳. 当 $a \subset n+1$ 但 $a \neq n+1$ 时，分以下三种情形讨论: $a = n$, $a \subset n$ 但 $a \neq n$, $n \in a$ (此时有 $a = (a \cap n) \cup \{n\}$，可对 $a \cap n$ 用归纳假设)

3. $a \approx m \ \wedge \ b \approx n \ \rightarrow \ a \times b \approx mn$

4. 仿练习十二题 4 证明 $\mathcal{P}(a) \approx {}^n2 = \{f \mid f: n \rightarrow 2\}$. 函数 f 的个数为 2^n

5. 对 n 归纳. $V_n \approx m \rightarrow V_{n+1} \approx 2^m$

6. 设 $a = \{f(0), f(1), f(2), \cdots\}$，其中 f 为 ω_0 到 a 的双射. 令 $g(f(n)) = f(n+1)$，得双射 $g: a \longrightarrow a - \{f(0)\}$

练习十五

1. 对 c 中元素个数归纳

2. 对给定的向量空间，所有线性无关向量组的集具有有限特征. 由 Tukey 引理，必有极大元，即该向量空间的极大线性无关组. 极大性决定了该组是空间的基底

3. 记 $A = \mathrm{Ran}(r)$. 在 $\mathcal{P}(A) - \{0\}$ 建立选择函数 g, $g(x) \in x$. 定义 f : $\mathrm{Dom}(r) \longrightarrow A$, 令 $f(x) = g(\{y \in A \mid xry\})$. 则 f 为所求

练习十六

1. 由 4.5 节命题 5 知 $|\cup_{n\in\omega} a_n| \leq \omega$. 为证 $\omega \lesssim \cup_{n\in\omega} a_n$, 取双射 $g : \omega \longrightarrow a_0$, 可建立 ω 到 $\cup_{n\in\omega} a_n$ 的单射

2. 由 4.5 节命题 5 , 只用证 $\omega \lesssim \cup_{n\in\omega} a_n$. 设 $|a_n| = k_n \in \omega - \{0\}$. 容易建立单射 f : $\omega \longrightarrow \cup_{n\in\omega} a_n$ 使 $f(n) \in a_n$

3. 由练习十四题 5 知 $|\mathrm{v}_n| < \omega$. 不用选择公理, 可直接将 v_ω 良序. 先使每个 v_n 良序 (对 n 归纳, 利用 v_n 的良序按字典顺序将 ${}^{\mathrm{v}_n}2$ 良序, 然后由 ${}^{\mathrm{v}_n}2 \approx \mathrm{v}_{n+1}$ 诱导 v_{n+1} 的良序). 在 v_ω 中规定

xRy 为:

(Ⅰ) $\mathrm{rank}(x) < \mathrm{rank}(y)$;

(Ⅱ) 当 $\mathrm{rank}(x) = \mathrm{rank}(y)$ 时按 $\mathrm{v}_{\mathrm{rank}(x)+1}$ 中序 x 在 y 之前.

R 为 v_ω 中的良序. 至此 $|\mathrm{v}_\omega|$ 已有意义.

$\forall x \in \mathrm{v}_\omega$, 记 $n = \mathrm{rank}(x)$, $x \in \mathrm{v}_{n+1}$, $n \in \omega$, 令 $f(x) = (n, g_n(x))$, 其中 g_n 是 v_{n+1} 到 $|\mathrm{v}_{n+1}|$ 的唯一同构, 这样得到 v_ω 到 $\omega \times \omega$ 的单射, 于是得 $|\mathrm{v}_\omega| \leq \omega$.

又因 $n \in \mathrm{v}_{n+1}$, 故 $\omega \subset \mathrm{v}_\omega$, $\omega \leq |\mathrm{v}_\omega|$

练习十七

1. (Ⅰ) $\lambda \geq \omega$ 时易知

$$\lambda \approx \lambda' \approx \lambda' \times \{0\} = \{\lambda\} \times \{0\} \cup \lambda \times \{0\} \approx 1 \times \{0\} \cup \lambda \times \{1\}$$

(Ⅱ) $\lambda \approx \{0\} \times \lambda = 1 \times \lambda$

2. 注意 $\kappa \times \{0\} \approx \kappa \times \{1\}$, $\kappa \times \lambda \approx \lambda \times \kappa$

3. 用定理 2

4. 参见练习九题 3，题 4

练习十八

1. n^m (自然数的指数运算)

2. $\kappa^2 = \kappa \times \kappa = \kappa$

3. $\omega_\alpha \prec \mathcal{P}(\omega_\alpha) \approx {}^{\omega_\alpha}2$

4. (Ⅰ) 对任一 $f: \mu \longrightarrow \kappa$，令

$$h(f) = f \cup \{(\alpha, 0) \mid \alpha \in \lambda - \mu\} \in {}^\lambda\kappa.$$

于是建立了单射 $h: {}^\mu\kappa \longrightarrow {}^\lambda\kappa$

(Ⅱ) $\lambda = \mu \rightarrow \kappa^\lambda = \kappa^\mu$;

$\lambda < \mu \rightarrow \kappa^\lambda \leq \kappa^\mu$ (由 (Ⅰ))

练习十九

1. 由练习十三题 3 知 $\alpha \leq \omega_\alpha$. 因 α 是极限序数，由 ω_α 的正则性及 4.8 节命题 6，$\omega_\alpha = \mathrm{cf}(\omega_\alpha) = \mathrm{cf}(\alpha) \leq \alpha$

2. (Ⅰ) $\alpha = \beta + 1 \rightarrow \beta \in \alpha \rightarrow \exists n\, \beta \in \lambda_n \rightarrow \alpha \in \lambda_n$
$\rightarrow \alpha \in \alpha$

(Ⅱ) 只用证 $\omega_\alpha \subset \alpha$. 因 $\omega_\alpha = \cup\{\omega_\beta \mid \beta < \alpha\}$，故 $\forall \gamma \in \omega_\alpha\ \exists \beta \in \alpha$ 使 $\gamma \in \omega_\beta$. 于是存在 n 使 $\beta \in \lambda_n$，且 $\gamma \in \omega_\beta \in \omega_{\lambda n}$

(Ⅲ) 令 $f(n) = \lambda_n$，则 $f: \omega \longrightarrow \alpha$ 是无界映射

(Ⅳ) 设有 $\beta < \alpha$ 使 $\beta = \omega_\beta$. 取使 $\beta \in \lambda_n$ 的最小 n. $n \neq 0$ (否则 $\omega_\beta = \beta \in \omega$). 于是

$\beta \in \omega_{\lambda n-1} \rightarrow \omega_\beta < \omega_{\lambda n-1} \rightarrow \beta < \lambda_{n-1}$,

与 n 的最小性矛盾

3. ($\leftarrow$) 为显然.

($\rightarrow$) 设 κ 是正则极限基数(即弱不可达基数)，由题 1，$\omega_\kappa = \kappa$.

$\lambda < \omega$ 时显然 $2^\lambda < \kappa$.

$\omega \leq \lambda < \kappa$ 时存在 β 使 $\lambda = \omega_\beta < \kappa = \omega_\kappa$，于是

$\beta < \kappa,\ \beta+1 < \kappa,\ \ \omega_{\beta+1} < \omega_\kappa = \kappa,\ 2^\lambda = \lambda^+ = \omega_{\beta+1} < \kappa$

练习二十

1. $(\forall x\varphi)^M \leftrightarrow (\neg\exists x\neg\varphi)^M \leftrightarrow \neg\exists x \in M\neg\varphi^M$

$\leftrightarrow \neg\exists x(x \in M \wedge \neg\varphi^M) \leftrightarrow \neg\exists x\neg(x \in M \rightarrow \varphi^M)$

$\leftrightarrow \forall x(x \in M \rightarrow \varphi^M) \leftrightarrow \forall x \in M\varphi^M$

练习二十一

1. 由 5.2 节可靠性定理推论，有

$\forall x_1 \cdots x_n \in M(\varphi^M \leftrightarrow \psi^M)$,

$\forall x_1 \cdots x_n \in N(\varphi^N \leftrightarrow \psi^N)$.

于是 $\forall x_1 \cdots x_n \in M$ 有

$(\varphi^M \leftrightarrow \varphi^N) \leftrightarrow (\psi^M \leftrightarrow \psi^N)$

2. 7° $z = x \cap y \leftrightarrow (\forall t \in x(t \in y \rightarrow t \in z) \wedge z \subset x \wedge z \subset y)$.

8° $z = x - y \leftrightarrow (\forall t \in x(t \notin y \leftrightarrow t \in z) \wedge z \subset x)$

12° $y = \cap x \leftrightarrow$

$\leftrightarrow (\forall t \in x(y \subset t) \wedge \forall t \in x\ \forall z \in t(\forall s \in x(z \in s) \rightarrow z \in y) \wedge (x = 0 \rightarrow y = 0))$

3. 3° $z = x \times y \leftrightarrow$

$\leftrightarrow \forall s \in x\ \forall t \in y((s,\ t) \in z) \wedge \forall u \in z\ \exists s \in x\ \exists t \in y\ (u = (s,\ t))$.

6° $y = \mathrm{Ran}(x) \leftrightarrow$

$\leftrightarrow \forall z \in y\ \exists t \in \cup\cup x((t,\ z) \in x) \wedge \forall z,\ t \in \cup\cup x((t,\ z) \in x \rightarrow z \in y)$.

10° f 是 x 到 y 的满射 $\leftrightarrow$ (f 是函数 $\wedge\ \mathrm{Dom}(f) = x \wedge \mathrm{Ran}(f) = y$)

11° f 是 x 到 y 的双射 $\leftrightarrow$ (f 是 x 到 y 的满射 $\wedge f$ 是单射)

练习二十二

1. 由 3.4 节命题 4 (Ⅰ), 有 $\forall x(x \subset \mathrm{WF} \to x \in \mathrm{WF})$, 即

$$(*) \qquad \forall x(\forall y \in x\ (y \in \mathrm{WF}) \to x \in \mathrm{WF}).$$

为证 V=WF, 只用证 $X = \{x \mid x \notin \mathrm{WF}\} = 0$. (反证)设 $X \neq 0$. 因 $\in$ 是 V 上的良基似集关系, 故由 6.1 节定理 1 知非空类 X 有 $\in$-极小元, 设为 x_0. $x_0 \notin \mathrm{WF}$. 由 x_0 的极小性知 $\forall y \in x_0\ y \in \mathrm{WF}$, 由此及 (*) 又得 $x_0 \in \mathrm{WF}$, 矛盾

2. 记 $X = \{t \in d_x \cap d_y \mid f_x(t) \neq f_y(t)\}$. 若 $X \neq 0$, 则 X 有 R- 极小元, 由 (2) 可推出矛盾

3. (Ⅰ) R 的似集性来源于事实: $\overset{<}{x} = \{y \mid (y, a) \in x\} \subset \cup\cup x$. 为证 R 的良基性, 任取 $b \neq 0$. b 的最小秩元素 x 便是 b 的 R- 极小元. 这是因为当 $(x_0, a) \in x$ 时, $\mathrm{rank}(x_0) < \mathrm{rank}(x)$.

(Ⅱ) 假设当 yRx 时 $F(G(y)) = y$, 我们有

$$\begin{aligned} F(G(x)) &= \{F(t) \mid tRG(x)\} = \{F(t) \mid (t, a) \in G(x)\} \\ &= \{F(G(y)) \mid y \in x\} = \{y \mid y \in x\} = x \end{aligned}$$

4. 由 6.1 节命题 2 即得 $d \subset \mathrm{cl}(A, x, R)$. 相反方向只用证每个 $p_n(x) \subset d$. (见 6.1 节定义 3 .)对 n 归纳.

$p_0(x) = \overset{<}{x} \subset d$, 因为

$$t \in \overset{<}{x} \to tRx \text{ 且 } t \in d_t \to t \in d$$

设 $p_n(x) \subset d$. 若 $t \in p_{n+1}(x)$, 则有 $s \in p_n(x)$, $t \in \overset{<}{s}$. 由归纳假设, $s \in d$. 于是有 yRx 使 $s \in d_y$. 由 6.1 节命题 1 得 $\overset{<}{s} \subset \mathrm{cl}(A, y, R)$, $t \in d_y$, $t \in d$

练习二十三

1. 3° x 是后继序数 $\leftrightarrow$ x 是序数 $\wedge\ x \neq 0\ \wedge$ x 不是极限序数

4° x是自然数 $\leftrightarrow$ ($x = 0 \vee x$ 是后继序数) $\wedge\ \forall y \in x(y = 0 \vee y$ 是后继序数)

5° $x=\omega \leftrightarrow \forall y\in x($ y 是自然数$)$

11° $x=\alpha-1 \leftrightarrow$ (α 是后继序数 $\wedge\ \alpha=x'$) $\vee$ (α 不是后继序数 $\wedge\ x=\alpha$)

2. $y=\{t+1 \mid t\in x\}$

$\leftrightarrow \forall t\in x(t'\in y) \wedge \forall s\in y\ \exists t\in x(s=t')$

3. 由 3.4 节命题 6， $\mathrm{rank}(x)=\cup\{\mathrm{rank}(y)+1 \mid y\in x\}$. 此式可视为 $\mathrm{rank}(x)$ 的归纳定义式: $\mathrm{rank}(x)=G((\mathrm{rank}\lceil x)$, 其中 G 涉及求后继与并等具有绝对性的运算

练习二十四

1. $\mathrm{D}_{\in}(2,\ 3,\ 0,\ 1)=\{(0,\ 1,\ 0),\ (0,\ 1,\ 1)\}$.

$\mathrm{D}_{=}(2,\ 3,\ 0,\ 1)$

$=\{(0,\ 0,\ 0),\ (0,\ 0,\ 1),\ (1,\ 1,\ 0),\ (1,\ 1,\ 1)\}$.

$\mathrm{P}_{\exists}(2,\ 2,\ \mathrm{D}_{\in}(2,\ 3,\ 0,\ 1))=\{(0,\ 1)\}$.

$\mathrm{P}_{\exists}(2,\ 2,\ \mathrm{D}_{=}(2,\ 3,\ 0,\ 1))=\{(0,\ 0),\ (1,\ 1)\}\}$

2. 11，12

3. $r\cup t=a^n-((a^n-r)\cap(a^n-t))$

4. 当 $s=(x_0,\cdots,x_{n-1})$ 用记号 $s''t$ 表示 $(x_0,\cdots,x_{n-1},t)$.

$\forall z,\ x,\ n,\ y\in M,\ z=\mathrm{P}_{\exists}(x,\ n,\ y) \leftrightarrow$

$\leftrightarrow ((n\in\omega \wedge n\neq 0)\to(\forall s\in z(s\in x^n \wedge \exists t\in \cup\cup\cup y(s''t\in y)) \wedge \forall s\in x^n(\exists t\in\cup\cup\cup y(s''t\in y)\to s\in z))) \wedge$

$\wedge ((n\notin\omega \vee n=0)\to z=0)$.

式中 $t\in\cup\cup\cup y$ 是因为 $t\in\{n,\ t\}\in(n,\ t)\in s''t\in y$

练习二十五

1. (Ⅰ) 取公式 $\varphi(y)$ 为 $y=a_0 \vee y=a_1 \vee\cdots\vee y=a_{n-1}$，利用 6.5 节命题 1 便可.

(Ⅱ) 由 6.5 节命题 2 (Ⅱ)，l_α 的任一有限子集 $\in \mathcal{D}(l_\alpha)=l_{\alpha+1}$

2. 当 a 为无限集时不能用题 1 的方法证明命题 2 (Ⅱ). 若用题 1 (Ⅰ) 的方法证明, 要引进无穷多个 $\varphi(y)$ 那样的公式. 这种证明不能在 ZF 中形式化, 而命题 2 (Ⅱ) 是一形式语句

练习二十六

1. M 是真类, 故 $M \subset \mathrm{v}_\alpha$ 不成立, 必有 $x \in M$, $\mathrm{rank}(x) \geq \alpha$. 由练习二十三题 3 知 $\mathrm{rank}(x) = (\mathrm{rank}(x))^M \in M$. 又因 M 是可递类, 故 $\alpha \in M$. l_α 对 M 是绝对的(6.6 节命题 1), 且因 M 可递, 故当 $x \in l_\alpha$ 时 $x \in M$. 于是

$$x \in \mathrm{L} \ \leftrightarrow\ \exists \alpha x \in l_\alpha \ \leftrightarrow\ x \in M \wedge$$
$$\wedge\ \exists \alpha \in M (x \in l_\alpha)^M \ \leftrightarrow\ x \in \mathrm{L}^M.$$

以上说明 $\mathrm{L} = \mathrm{L}^M \subset M$

练习二十七

1. 1° 反自反性: $x R_\alpha x \ \rightarrow\ x R_{\rho(x)+1} x$

2° 三分律: 任取 x, $y \in l_\alpha$. 不妨设 $\rho(x) \leq \rho(y)$. 在 $l_{\rho(y)+1}$ 中, 因而在 l_α 中三分律成立

3° 可递性: 设 $x R_\alpha y$ 且 $y R_\alpha z$. 此时 $\rho(x) \leq \rho(y) \leq \rho(z)$, x, y, $z \in l_{\rho(z)+1}$. 在 $l_{\rho(z)+1}$ 中, $x R_{\rho(z)+1} z$, 进而 $x R_\alpha z$. (注意 $l_{\rho(z)+1}$ 具有 $R_{\rho(z)+1}$ - 可递性)

4° 良基性: 设 $0 \neq x \subset l_\alpha$. 令 $\beta = \min\{\rho(y) \mid y \in x\}$. 这时 $x \cap l_{\beta+1} \neq 0$. 于是 $x \cap l_{\beta+1}$ 的 $R_{\beta+1}$ - 最小元即为 x 的 R_α - 最小元

2. 任取 ZFC+(V=L) 的 n 条公理 $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$. 由 6.3 节推论 5 知下面的公式 (1) 从 ZFC+(V=L) 可证:

$$\exists z(|z| = \omega\ \wedge\ z \text{是可递集} \wedge\ \varphi_1^z\ \wedge \cdots \wedge\ \varphi_n^z). \qquad (1)$$

基于 ZF 可证 L 是 ZF+(V=L)+AC 的模型(6.6 节定理 1 及 6.7 节推论 1) 故由可靠性定理推论 (5.2 节) 知 (1) 在 L 中为真. 需要证明的是 (1) 在 V 中为真.

(Ⅰ) $(|z|=\omega)^{\mathrm{L}} \to \exists f \in \mathrm{L}(f\text{是}\omega\text{到}z\text{的双射})^{\mathrm{L}}$

$\to \exists f(f$ 是 ω 到 z 的双射) (5.3 节定理 2 - 11°)

$\to |z|=\omega.$

(Ⅱ) $(z$ 是可递集$)^{\mathrm{L}} \to z$ 是可递集(5.3 节定理 1 - 10°)

(Ⅲ) 因 L 是可递的，故 $(\varphi_i^z)^{\mathrm{L}} \leftrightarrow \varphi_i^z$ (5.3 节命题 2)

(1) 在 V 中为真，意为 $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ 存在可数的可递集模型

练习二十八

1. 设 $(P, \leq)$ 按 7.1 节定义 1 是偏序结构，且

$$p<q \leftrightarrow p \leq q \wedge p \neq q,$$

则 $(P, <)$ 符合 2.1 节定义 1 的条件 (Ⅰ) 与 (Ⅱ).

设 $(P, <)$ 按 2.1 节定义 1 是偏序结构，规定

$$p \leq q \leftrightarrow p<q \wedge p=q,$$

则 $(P, \leq)$ 符合 7.1 节定义 1 的条件 (Ⅰ),(Ⅱ),(Ⅲ)

2. (Ⅱ) $e_P=0$

(Ⅲ) p 延伸 q 指 $q \subset p$. p 与 q 相容，指 p 与 q 在 $\mathrm{Dom}(p) \cap \mathrm{Dom}(q)$ 上一致，此时 $p \cup q$ 为 p 与 q 的公共延伸. $p \perp q$ 意为 $p \cup q$ 不是函数.

(Ⅳ) 因 $P=\cup_{n \in \omega} P_n$，其中 $P_n=\{p \subset n \times 2 \mid p\text{是函数}\}$，故 $|P|=\omega$，P 的任意子集皆可数

(Ⅴ) $\forall p \in P$, 任取 $m \in \omega-\mathrm{Dom}(p)$, 令

$$q=p \cup\{(m, 0)\}, \quad r=p \cup\{(m, 1)\},$$

则 $q, r \in P$, $q \leq p$, $r \leq p$, 且 $q \perp r$.

3. 设 $D=\{D_n \mid n \in \omega\}$. D_n 为 P 之稠子集. 归纳定义 $p_n \in P$ 如下：$p_0=P$ 的某一元素(因 $P \neq 0$); $p_{n+1}=p_n$ 在 D_n 中的某一延伸(因 D_n 稠，故存在 $q \in D_n$ 使 $q \leq p_n$，取一这样的 q 作为 p_{n+1}). 于是

$$p_0 \geq p_1 \geq p_2 \geq \cdots$$

令 $G=\{q \in P \mid \exists n\ p_n \leq q\}$，易证 G 是滤子(由 p_n 生成)，且

$\forall n(G \cap D_n \neq 0)$

练习二十九

1.

$$\{(0,\ p)\}_G = \begin{cases} \{0\} & p \in G \\ 0 & p \notin G \end{cases}$$

2. 不一定成立. 如设 $p \in G$, $p \neq e$, $\tau = \{(\sigma,\ p)\}$, 则

$$x = \tau_G = \{\sigma_G\},\ \breve{x} = \{((\breve{\sigma})_G,\ e)\} \neq \tau$$

3. 先证 $f_G \in M[G]$.

$$f_G = \cup G = \{a \mid \exists p \in G(a \in p)\}$$
$$= \{a \mid \exists p \in G\ a = (n,\ p(n))\ \wedge\ n \in \mathrm{Dom}(p)\}.$$

令 $\tau = \{(\breve{a},\ p) \mid p \in P,\ a = (n,\ p(n)),\ n \in \mathrm{Dom}(p)\}$, 则

$$\tau_G = \{(\breve{a})_G \mid \exists p \in G(\breve{a},\ p) \in \tau\} \qquad (7.2节定义3(2))$$
$$= \{a \mid \exists p \in G\ a = (n,\ p(n)),\ n \in \mathrm{Dom}(p)\} = f_G$$

再证 $f_G \notin M$. 令 $E = \{p \mid \neg(p \subset f_G)\}$, 则 $E \cap G = 0$. 但任何 $q \in P$ 都可延伸到 E 中, 故 E 在 P 中稠. 这时若 $f_G \in M$, 则 $E \in M$. E 与 G 不相交, 这与 P 型滤子的定义矛盾

练习三十

1. $(\to)$ $p \Vdash \tau_1 = \tau_2 \ \to\ \forall q \leq p\ q \Vdash \tau_1 = \tau_2$

(7.3 节命题 1 (Ⅰ))

$\to\ \forall q \leq p(q \leq s\ \to\ q \Vdash \sigma_1 = \sigma_2)$

(见 7.3 节例 1 中 $p \leq s$ 情形)

$(\leftarrow)$ 已知 $\forall q \leq p(q \leq s\ \to\ q \Vdash \sigma_1 = \sigma_2)$. 设 $p \in G$. 若 $s \notin G$, 则 $\tau_{1G} = \tau_{2G} = 0$. 若 $s \in G$, 则 $\exists q \in G$, $q \leq p$ 且 $q \leq s$, 故 $q \Vdash \sigma_1 = \sigma_2$, $\sigma_{1G} = \sigma_{2G}$. 于是

$$\tau_{1G} = \{\sigma_{1G}\} = \{\sigma_{2G}\} = \tau_{2G}$$

2. 同正文一样，用 M 表示 ZFC 的某个可数可递集模型.

选取偏序集 P 和 M 上 P 型滤子 G 使 $G \in M[G] - M$. (例如，取练习二十八题 2 中的 P. P 满足 7.1 节命题 3 的条件 (*)，从而 $G \notin M$.)

由 7.2 节命题 5 (Ⅱ) 知 $\mathrm{O}(M[G]) = \mathrm{O}(M)$ (即 $M[G]$ 与 M 含有相同的序数)，故

$$
\begin{aligned}
\mathrm{L}^{M[G]} &= l_{\mathrm{O}(M[G])} \qquad (6.8 \text{ 节命题 } 3\ (\mathrm{I}))\\
&= l_{\mathrm{O}(M)}\\
&= \mathrm{L}^{M} \subset M.
\end{aligned}
$$

这说明在 $M[G]$ 中 $\mathrm{V} \neq \mathrm{L}$. (否则 $M[G] = \mathrm{V}^{M[G]} = \mathrm{L}^{M[G]} = \mathrm{L}^{M} \subset M$.)

假如 ZFC+(V≠L) 是矛盾的，则从 ZFC+(V≠L) 的有限成员 $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ 能推出矛盾:

$$\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n \vdash \psi \wedge \neg \psi.$$

但我们基于 ZFC 证明了 $(\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n)^{M[G]}$，于是由 5.2 节可靠性定理推论得

$$\mathrm{ZFC} \vdash \psi^{M[G]} \wedge \neg \psi^{M[G]}, \text{矛盾}.$$

这说明若 ZFC 无矛盾，则 ZFC + (V ≠ L) 也无矛盾.

名 词 汇 总

符号汇总

1.1

$\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$

$\forall$, $\exists$, $\exists!$

$=$, $\in$

1.2

(ZF 1)

(ZF 2)

φ, $\subset$

1.3

(ZF 3)

$\{a, b\}$

(a, b)

1.4

(ZF 4)

$a - b$

$\cup a$

$\cap a$

$\mathcal{P}(a)$

(ZF 5)

1.5

$a \times b$

r^{-1}

$\mathrm{Dom}(r)$

$\mathrm{Ran}(r)$

$r\lceil c$

$r[c]$

$s \circ r$

$f: a \longrightarrow b$

$x \longmapsto y$

${}^a b$, b^a

2.1

$<_a$

$a \overset{\varphi}{\sim} b$, $a \sim b$

a_x

2.2

a'

On

2.3

ω

(ZF 6)

3.1

(ZF 7)

3.2

V

3.3

$\alpha + \beta$

$\alpha \cdot \beta$

α^β

3.4

V_α

WF

$\mathrm{rank}(x)$

3.5

(ZF 8)